

Dariusz KACPRZAK¹
Katarzyna RUDNIK²

PORZĄDKOWANIE WARIANTÓW DECYZYJNYCH Z WYKORZYSTANIEM TRANSFORMATY MELLINA W ROZMYTEJ METODZIE SAW³

W artykule pokazano zastosowanie transformaty Mellina do porządkowania trójkątnych i trapezowych liczb rozmytych, które są stosowane do lingwistycznego określenia ocen wariantów decyzyjnych w rozmytej metodzie SAW. Proponowana metoda bazuje na funkcji gęstości prawdopodobieństwa związanej z liczbą rozmytą, otrzymanej w wyniku transformacji proporcjonalnej oraz wykorzystuje transformatę Mellina do wyznaczenia wartości oczekiwanej i wariancji. Otrzymane charakterystyki liczbowe pozwalają na uszeregowanie liczb rozmytych i utworzenie rankingu wariantów decyzyjnych. O pozycji w rankingu decyduje wartość oczekiwana, tzn. im wyższa jest jej wartość, tym wyższa pozycja wariantu decyzyjnego w rankingu. Przy jednakowych wartościach oczekiwanych wyższą pozycję wariantu decyzyjnego w rankingu wskazuje mniejsza wartość wariancji.

W artykule szczegółowo przedstawiono zależności na stałą proporcjonalności do wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa związanej z liczbą rozmytą, transformatę Mellina, wartość oczekiwaną oraz wariancję dla liczb rozmytych trójkątnych i trapezowych. Zaletą proponowanej metody jest uwzględnienie klasy funkcji R i L w definicji liczb rozmytych typu RL , a nie tylko kilku wybranych argumentów. Z tego względu prezentowane rozwiązanie szeregowania wariantów decyzyjnych może być alternatywą dla często stosowanych metod defuzyfikacji w dyskretnych rozmytych metodach wielokryterialnego wspomagania decyzji (FMADM), bazujących na wartościach granicznych jądra i nośnika.

W artykule przedstawiono zastosowanie proponowanej metody w wybranym obszarze zarządzania przedsiębiorstwa na dwóch przykładach podejmowania decyzji w ujęciu wielokryterialnym. Przykłady praktyczne pokazują skuteczność zastosowania transformaty Mellina w rozmytej metodzie SAW.

Słowa kluczowe: rozmyta metoda SAW, transformata Mellina, podejmowanie decyzji wielokryterialnych, trójkątne liczby rozmyte, trapezowe liczby rozmyte

1. WPROWADZENIE

W otaczającym nas świecie powszechnie spotyka się sytuacje, w których trzeba podjąć decyzje biorące pod uwagę różnorodne kryteria (czasami wzajemnie sprzeczne). Pojawiające się w tym procesie trudności spowodowały, że w ostatnich latach nastąpił gwałtowny rozwój metod określanych mianem dyskretne metody wielokryterialne wspomagania decyzji (MADM, *Multi Attribute Decision Making*). W metodach tych zbiór danych sta-

¹ dr Dariusz Kacprzak, Katedra Matematyki, Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok, tel./faks: (+48) 85 746 90 75, e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

² dr inż. Katarzyna Rudnik, Instytut Innowacyjności Procesów i Produktów, Politechnika Opolska, ul. Ozimska 75, 45-370 Opole, tel./faks: (+48) 77 449 88 45, e-mail: k.rudnik@po.opole.pl (autor korespondencyjny)

³ Praca wykonana w ramach realizacji pracy statutowej S/WI/2/2011.

nowią: zbiór wariantów decyzyjnych, z których decydent chce wybrać najlepszy; zbiór kryteriów, względem których oceniane są analizowane warianty decyzyjne; wektor wag określający istotność poszczególnych kryteriów oraz tzw. macierz decyzyjna złożona z wartości ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów. Na podstawie tych danych tworzony jest ranking liniowy szeregujący analizowane warianty decyzyjne od najlepszego (najwyższa pozycja rankingowa) do najgorszego (najniższa pozycja rankingowa). W przedsiębiorstwie metody te są wykorzystywane do analizy różnych form problemów decyzyjnych, między innymi alokacji zasobów, wyznaczania strategii, prognozowania, rozwiązywania konfliktów⁴ itp.

Jedną z najbardziej znanych i najczęściej używanych dyskretnych metod wielokryterialnych jest metoda SAW (*Simple Additive Weighting*). W metodzie tej dokonuje się podziału kryteriów na dwie grupy: typu „zysk” (im więcej, tym lepiej) oraz typu „koszt” (im mniej, tym lepiej). Następnie normalizuje się elementy macierzy decyzyjnej w celu zapewnienia porównywalności wartości ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów. Wariantem decyzyjnym, który powinien zostać wybrany, jest ten, dla którego uzyskana suma ważona ocen ma największą wartość. Takie uporządkowanie wariantów decyzyjnych i wskazanie najlepszego jest możliwe w sytuacji, gdy elementy macierzy decyzyjnej oraz wektor wag są precyzyjnie i jednoznacznie określone za pomocą liczb rzeczywistych. W praktyce oceny takie (szczególnie elementy macierzy decyzyjnej) mogą być trudno mierzalne lub też ich ocena w sposób ilościowy może być wręcz niemożliwa. W takiej sytuacji można zastosować podejście lingwistyczne wykorzystujące język naturalny zamiast liczb⁵. W takim wypadku zmienne lingwistyczne można opisać za pomocą liczb rozmytych. Efektem działania metody SAW będą również liczby rozmyte, które po wyostrzeniu utworzą ranking i wskażą najlepszy wariant decyzyjny. Pierwotna metoda SAW przyjmuje wówczas postać metody rozmytej FSAW (*Fuzzy Simple Additive Weighting*).

Jak pokazują praktyczne zastosowania metody FSAW⁶⁷, najczęściej korzysta się z liczb rozmytych trójkątnych oraz trapezowych, dla których stosowane metody wyostrzenia oparte są na granicznych wartościach przedziału jądra i nośnika. W wypadku stosowania innych postaci liczb rozmytych, takich jak liczby rozmyte typu *LR*, gdzie funkcje *L* i *R* nie są liniowe, metoda wyostrzenia powinna uwzględniać również klasę funkcji *L* i *R*. W niniejszym artykule zaprezentowano jedną z takich metod opartą na transformacie Mellina.

W rozdziale zaprezentowano podstawowe informacje dotyczące liczb rozmytych, z naciskiem na liczby typu *LR*, następnie opisano metody SAW oraz jej rozmytej wersji. W dalszych częściach przedstawiono transformatę Mellina oraz jej wykorzystanie do liczb i przedziałów rozmytych typu *LR*, co pozwala na liniowe porządkowanie liczb rozmytych. Przedstawiono również przykłady zastosowania prezentowanych metod.

⁴ A. Prusak, P. Stefanów, M. Gardian, *Graficzna forma kwestionariusza w badaniach AHP/ANP*, „Modern Management Review” XVIII/20 (2013), s. 171–189.

⁵ F. Herrera, E. Herrera-Viedma, *Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information*, „Fuzzy Sets and Systems” 2000/115, s. 67–82.

⁶ L. Abdullah, *Developing decision on suitable wastewater treatment technology using fuzzy simple additive weighting*, „International Journal of Engineering and Technology” 7/2 (2015), s. 405–413.

⁷ W. Deni, O. Sudana, A. Sasmita, *Analysis and implementation fuzzy multi-attribute decision making SAW method for selection of high achieving students in faculty level*, „IJCSI” 10/1–2 (2013), s. 674–680.

2. LICZBY ROZMYTE WEDŁUG ZADEHA ORAZ TYPU LR

W 1965 roku w czasopiśmie „Information and Control” ukazała się praca Lotfiego Zadeha pod tytułem *Fuzzy Sets*⁸. Autor wprowadził w niej pojęcie zbiorów i liczb rozmytych, które dało możliwość matematycznego modelowania wielkości nieprecyzyjnych lub niepewnych. Znalazło to szerokie zastosowanie w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i podejmowaniem decyzji.

Zbiorem rozmytym A na uniwersum X nazywa się zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A : X \rightarrow [0,1]\}, \quad (1)$$

gdzie μ_A jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A , która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A .

Do częściowego opisu zbiorów rozmytych wykorzystuje się pewne charakterystyki. Jedną z najważniejszych jest nośnik, który odzwierciedla rozmytość opisywanej wielkości. Nośnikiem zbioru rozmytego A nazywa się zbiór oznaczany jako $\text{supp}A$ i określony następująco: $\text{supp}A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ ⁹. Inne charakterystyki to między innymi normalność i wypukłość. Zbiór rozmyty A jest normalny, gdy $\exists x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = 1$ ¹⁰, a wypukły, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1] : \mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$ ¹¹.

Liczba rozmyta A jest wypukłym, normalnym zbiorem rozmytym określonym na uniwersum liczb rzeczywistych ($X = \mathbb{R}$) takim, że¹²:

- $\exists! x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$;
- μ_A jest kawałkami ciągła.
-

Ponieważ w określeniu liczby rozmytej nie ma założenia o ciągłości funkcji przynależności μ_A , liczby rzeczywiste z funkcją charakterystyczną mogą być traktowane jako szczególne przypadki liczb rozmytych. Podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych opierają się na zasadzie rozszerzania¹³. Niech A i B będą liczbami rozmytymi o funkcjach przynależności μ_A i μ_B , wówczas dodawanie (+), odejmowanie (−), mnożenie (·) i dzielenie (:) wyglądają następująco:

$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{x,y,z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (2)$$

gdzie $* \in \{+, -, \cdot, :\}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$ (przy dzieleniu $y \neq 0$).

Łatwo zauważyć, że wykonywanie jakichkolwiek działań arytmetycznych na liczbach

⁸ L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, „Information and Control” 1965/8, s. 338–353.

⁹ D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York 1980.

¹⁰ *Ibidem*.

¹¹ H.J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Applications*, wyd. 4, Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht–London 2001.

¹² D. Dubois, H. Prade, *op. cit.*; H.J. Zimmermann, *op. cit.*

¹³ H.J. Zimmermann, *op. cit.*

rozmytych jest dość skomplikowane. Zgodnie z (2) wymagają one wykonania wielu operacji zarówno na stopniach przynależności, jak i na elementach nośników. Ponadto zastosowania praktyczne liczb rozmytych pokazują, że ich funkcje przynależności zazwyczaj nie są dyskretne, ale ciągłe oraz mają dość regularny kształt często w postaci trójkąta, trapezu, krzywej Gaussa itp. Oznacza to, że nie trzeba podawać stopni przynależności dla wszystkich elementów nośnika (elementy x' z zerową wartością funkcji przynależności ($\mu_A(x') = 0$) nie są uwzględniane), a jedynie kilka parametrów, które jednoznacznie opiszą regularne funkcje przynależności.

Spostrzeżenia te sprawiły, że Dubois i Prade przedstawili specjalną formę prezentacji liczb rozmytych, nazywaną reprezentacją typu LR , która oparta jest na funkcjach odniesienia. Funkcja L jest funkcją odniesienia, jeżeli¹⁴:

- $L(-x) = L(x)$;
- $L(0) = 1$;
- L jest funkcją nierosnącą w przedziale $[0, +\infty)$.

Liczba rozmyta A jest liczbą rozmytą typu LR , gdy jej funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) & \text{gdy } x \leq m_A \\ R\left(\frac{x - m_A}{\beta_A}\right) & \text{gdy } x \geq m_A \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie L i R są funkcjami odniesienia, m_A jest liczbą rzeczywistą, nazywaną wartością średnią ($\mu_A(m_A) = 1$), natomiast $\alpha_A > 0$ i $\beta_A > 0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, zwanymi odpowiednio rozrzutami lewo- i prawostronnymi¹⁵.

Funkcję przynależności (3) liczby rozmytej A typu LR charakteryzują trzy parametry m_A , α_A i β_A , co pozwala ją zapisać w postaci (rys. 1a):

$$A = (m_A; \alpha_A; \beta_A). \quad (4)$$

Podstawowe operacje na liczbach rozmytych typu LR sprowadzają się do operacji na tych trzech parametrach (poniżej zaprezentowano dwa działania wykorzystywane w dalszej części pracy). Niech dane będą liczby rozmyte $S = (m_S; \alpha_S; \beta_S)$ i $Z = (m_Z; \alpha_Z; \beta_Z)$ oraz liczba rzeczywista $r \in \mathbb{R}$, wówczas:

- suma liczb rozmytych S i Z jest równa:

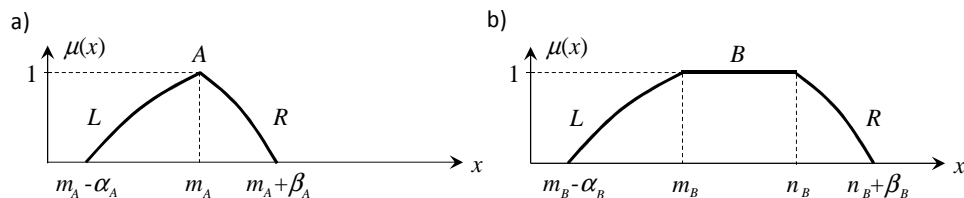
$$S + Z = (m_S + m_Z; \alpha_S + \alpha_Z; \beta_S + \beta_Z), \quad (5)$$

- iloczyn liczby rzeczywistej r i liczby rozmytej S jest równy:

$$r \cdot S = (r \cdot m_S; r \cdot \alpha_S; r \cdot \beta_S). \quad (6)$$

¹⁴ J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.

¹⁵ D. Dubois, H. Prade, *op. cit.*

Rys. 1. a) Liczba rozmyta A typu LR ; b) Przedział rozmyty B typu LR 

Źródło: opracowanie własne.

W praktyce dość często można się spotkać z sytuacją, że istnieje większa liczba argumentów (przedział), dla których funkcja przynależności liczby rozmytej przyjmuje wartość jeden¹⁶. Taki zbiór nazywa się jądrem zbioru rozmytego A i oznacza jako $\ker A$ ($\ker A = \{x \in X: \mu_A(x) = 1\}$). W takiej sytuacji liczba rozmyta A typu LR staje się przedziałem rozmytym B typu LR o funkcji przynależności postaci (rys. 1b):

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_B - x}{\alpha_B}\right) & \text{gdy } x \leq m_B \\ 1 & \text{gdy } m_B \leq x \leq n_B, \\ R\left(\frac{x - n_B}{\beta_B}\right) & \text{gdy } x \geq n_B \end{cases} \quad (7)$$

gdzie wszystkie oznaczenia są analogiczne jak dla liczby rozmytej. Przedział rozmyty charakteryzują cztery parametry, co można zapisać w postaci:

$$B = (m_B; n_B; \alpha_B; \beta_B). \quad (8)$$

Operacje wykonywane na liczbach rozmytych typu LR można łatwo przenieść na przedziały rozmyte typu LR ¹⁷.

Jak już wspomniano we wstępie, w praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, na przykład w metodach wielokryterialnych, bardzo często funkcje odniesienia są liniowe. Wówczas zamiast odpowiednio o liczbach rozmytych A oraz przedziałach rozmytych B typu LR mówimy o trójkątnych oraz trapezowych liczbach rozmytych.

Funkcja przynależności trójkątnej liczby rozmytej A , która jest szczególnym przypadkiem funkcji przynależności (3), ma postać:

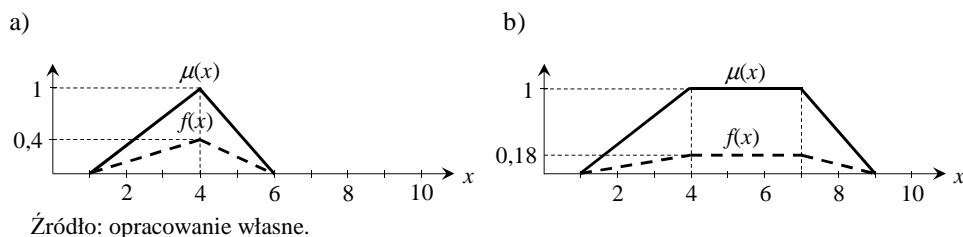
$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(x) = \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ R(x) = \frac{c-x}{c-b} & \text{gdy } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{gdy } x \leq a \vee x \geq c \end{cases}, \quad (9)$$

¹⁶ J. Kacprzyk, *op. cit.*

¹⁷ *Ibidem.*

gdzie $L(a) = 0$, $L(b) = R(b) = 1$ i $R(c) = 0$. Ponadto zazwyczaj stosuje się inny zapis dla tych liczb niż (4). Liczby trójkątne opisane są trójką liczb rzeczywistych $A = (a; b; c)$, gdzie $a = m_A - \alpha_A$, $b = m_A$ i $c = m_A + \beta_A$ (rys. 2a).

Rys. 2. Funkcje przynależności liczb rozmytych: a) trójkątnej (1; 4; 6); b) trapezowej (1; 4; 7; 9) oraz związane z nimi ich funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$



Źródło: opracowanie własne.

Z kolei funkcja przynależności trapezowej liczby rozmytej B , która jest szczególnym przypadkiem funkcji przynależności (7), wygląda następująco:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L(x) = \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{gdy } b \leq x \leq c \\ R(x) = \frac{d-x}{d-c} & \text{gdy } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{gdy } x \leq a \vee x \geq d \end{cases}, \quad (10)$$

gdzie $L(a) = 0$, $L(b) = 1$, $R(c) = 1$ i $R(d) = 0$. W tym wypadku, w porównaniu z zapisem (8), stosuje się opis $B = (a; b; c; d)$, gdzie $a = m_B - \alpha_B$, $b = m_B$, $c = n_B$ i $d = n_B + \beta_B$ (rys. 2b). W kolejnej części przybliżono metodę SAW oraz jej rozmytą wersję.

3. METODA SAW I JEJ ROZMYTA WERSJA

Metoda SAW została użyta po raz pierwszy w publikacji¹⁸ jako sposób rozwiązania problemu wyboru inwestycji. Metoda ta wywodzi się z tzw. szkoły amerykańskiej, gdzie algorytm decyzyjny oparty jest na funkcji użyteczności, która agreguje wartości ocen wariantów decyzyjnych dla poszczególnych kryteriów, z uwzględnieniem wag kryteriów. Każdy dyskretny, wielokryterialny problem decyzyjny można przedstawić w postaci macierzy decyzyjnej $\{x_{mn}\}_{m=1, \dots, M, n=1, \dots, N}$, w której kolumna Kn ($n = 1, \dots, N$) oznacza n -te kryterium decyzyjne, wiersz Hm ($m = 1, \dots, M$) m -ty wariant decyzyjny, a elementy macierzy x_{mn} ($n = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, M$; $x_{mn} \in \mathbb{R}$) – ocenę m -tego wariantu decyzyjnego ze względu na n -te kryterium. W analizie uwzględnia się również numeryczne (ostre) wagi kryterium Wn ($Wn > 0, n = 1, \dots, N$), które spełniają warunek: $W1 + W2 + \dots + WN = 1$.

¹⁸ C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff, *Introduction to operations research*, Wiley, New York 1957.

W metodzie SAW, ze względu na różnorodny charakter ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów, dokonuje się ich normalizacji. Zabieg ten umożliwia późniejsze porównanie wariantów. Według Hwanga i Yoon¹⁹ oraz Chena i Hwanga²⁰ istnieje wiele procedur umożliwiających normalizację wartości. Do najczęściej spotykanych należy normalizacja liniowa typu II, która jest przeprowadzana za pomocą następującej formuły:

$$\forall m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N: \tilde{x}_{mn} = \begin{cases} \frac{x_{mn}}{\max_{n \in Nz} (x_{mn})} & \text{gdy } n \in Nz \\ 1 - \frac{x_{mn}}{\max_{n \in Nk} (x_{mn})} & \text{gdy } n \in Nk \end{cases}, \quad (11)$$

gdzie Nz oznacza zbiór kryteriów typu „zysk” (im więcej, tym lepiej), Nk – zbiór kryteriów typu „koszt” (im mniej, tym lepiej).

Kombinacja liniowa wektora wagowego $[W_1, W_2, \dots, W_N]$ oraz znormalizowanych wartości wariantów decyzyjnych (11) stanowi funkcję agregującą, która decyduje o pozycji w rankingu każdego z wariantów decyzyjnych. Funkcja agregująca S_f jest zatem wyliczana na podstawie następującej zależności:

$$\forall m = 1, \dots, M: S_f(Hm) = \sum_{n=1}^N W_n \cdot \tilde{x}_{mn}. \quad (12)$$

Im większa wartość funkcji S_f , tym wariant jest bardziej preferowany ze względu na spełnienie ograniczeń i celów wyrażonych kryteriami $K_1 - K_N$.

W rozmytej metodzie SAW (metodzie FSAW) warianty decyzyjne są oceniane względem każdego kryterium nie za pomocą liczb rzeczywistych $x_{mn} \in \mathbb{R}$, lecz za pomocą określeń lingwistycznych (np. odpowiednia, dobra, bardzo dobra ocena wariantu), utożsamianych z liczbami rozmytymi A_{mn} . Najczęściej wykorzystywane są w tym celu trójkątne lub trapezowe liczby rozmyte, których funkcje przynależności są opisane wzorami (9) i (10). Niektóre wersje metody FSAW²¹ zakładają określenia lingwistyczne wariantów decyzyjnych, lecz są one utożsamiane nie z liczbą rozmytą, ale z ostrą wartością liczbową, błędnie określaną jako wartość lingwistyczna (*linguistic value*). W takim przypadku, po uwzględnieniu ostrej (rzeczywistej) wartości liczbowej dla wariantu decyzyjnego, algorytm metody jest analogiczny do metody SAW.

W literaturze²² wyszczególniono różne podejścia do wyznaczania funkcji agregującej na podstawie liczb rozmytych A_{mn} oraz ostrych (bądź rozmytych) wag kryteriów W_n . Metody Baasa i Kwakernaaka, Dubois'a i Prade'a oraz Chenga i McInnisa wykorzystują operator α -przecięcia do estymacji funkcji przynależności wyjściowej liczby rozmytej dla

¹⁹ C.-L. Hwang, K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making*, „Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems” 1981/186.

²⁰ S.-J. Chen, C.-L. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, „Lecture Notes in Economics and mathematical Systems” 1992/375.

²¹ W. Deni, O. Sudana, A. Sasmita, *Analysis and implementation fuzzy multi-attribute decision making SAW method for selection of high achieving students in faculty level*, „IJCSI International Journal of Computer Science Issues” 10/1–2 (2013), s. 674–680.

²² S.-J. Chen, C.-L. Hwang, *op. cit.*

każdego wariantu²³ – są to zatem metody bardziej złożone obliczeniowo. Z kolei metoda Bonissone’a nie zakłada normalizacji liczb rozmytych, a wykorzystuje jedynie operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych typu *LR* [wzór (5) i (6)]. Jest to znacznie prostsza metoda do implementacji oraz częściej wykorzystywana w literaturze, dlatego też jest również wykorzystywana w niniejszej pracy.

Podejście Bonissone’a²⁴ zakłada, że funkcja agregująca (oznaczona symbolem FS_f) wynika z następujących wyliczeń:

$$\forall m = 1, \dots, M: FS_f(Hm) = \sum_{n=1}^N Wn \cdot A_{mn}, \quad (13)$$

gdzie Hm stanowi m -ty wariant decyzyjny, Wn – wagę n -tego kryterium w postaci liczby ostrej (bądź rozmytej), A_{mn} – liczbę rozmytą określającą ocenę m -tego wariantu decyzyjnego ze względu na n -te kryterium.

Przy założeniu wymogu, że wskazane warianty mają spełniać wszystkie kryteria oceny, funkcja agregująca może być wyliczana jako operacja przecięcia liczb rozmytych wyrażona z zastosowaniem ogólnego operatora t -normy²⁵ dla N argumentów:

$$\forall m = 1, \dots, M: FS_f(Hm) = T_{n=1}^N(Wn \cdot A_{mn}). \quad (14)$$

Wyliczenia na podstawie wzoru (14) nie gwarantują jednak, że otrzymany wynik w postaci zbioru rozmytego będzie spełniał wymogi liczby rozmytej (zwłaszcza warunek wypukłości).

Niezależnie od podejścia, liczby rozmyte określone przez funkcje agregującą FS_f dają jedynie ogólny pogląd na ocenę wariantów decyzyjnych. W celu uszeregowania wariantów decyzyjnych należy dokonać defuzyfikacji liczb rozmytych i liniowego uporządkowania otrzymanych wyników ocen. Najbardziej preferowany wariant decyzyjny będzie charakteryzować się najwyższą oceną. W kolejnym rozdziale zaprezentowano metodę wykorzystującą transformatę Mellina, która pozwala na porządkowanie wyników liczb rozmytych za pomocą charakterystyk liczbowych (wartości oczekiwanych i wariancji).

4. METODA PORZĄDKOWANIA LINIOWEGO LICZB ROZMYTYCH ZA POMOCĄ TRANSFORMATY MELLINA

Niech S będzie liczbą rozmytą typu *LR* o funkcji przynależności $\mu_S(x)$. Stosując transformację liniową, proporcjonalną (*proportional probability distribution*) lub jednorodną (*uniform probability distribution*)²⁶, z funkcji $\mu_S(x)$ można otrzymać funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_S(x)$, która jest związana z liczbą rozmytą S . W pracy zastosowano transformację proporcjonalną, ponieważ metoda ta zachowuje przedziały nośnika oraz

²³ *Ibidem*.

²⁴ P.P. Bonissone, *A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications*, [w:] *Approximate reasoning in decision analysis*, red. M.M. Gupta, E. Sanchez, North-Holland, Amsterdam 1982, s. 329–339.

²⁵ M.M. Gupta, J. Qi, *Theory of T-norms and fuzzy inference methods*, „Fuzzy Sets and Systems” 1991/40, s. 431–450.

²⁶ K.P. Yoon, *A probabilistic approach to rank complex fuzzy numbers*, „Fuzzy Sets and Systems” 1996/80, s. 167–176.

jądra. Polega ona na wyznaczeniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_S(x)$, związanej z liczbą rozmytą S , na podstawie następującej zależności:

$$f_S(x) = h \cdot \mu_S(x), \quad (15)$$

gdzie h jest stałą proporcjonalności taką, że pole pod funkcją $f_S(x)$ jest równe jeden. Rozważając liczbę rozmytą A typu LR o funkcji przynależności (3), otrzymuje się:

$$f_A(x) = \begin{cases} h \cdot L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) & \text{gdy } x \leq m_A \\ h \cdot R\left(\frac{x - m_A}{\beta_A}\right) & \text{gdy } x \geq m_A \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie

$$h = \left(\int_{m_A - \alpha_A}^{m_A} L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) dx + \int_{m_A}^{m_A + \beta_A} R\left(\frac{x - m_A}{\beta_A}\right) dx \right)^{-1}, \quad (17)$$

a dla przedziału rozmytego B typu LR o funkcji przynależności (7) jest to:

$$f_B(x) = \begin{cases} h \cdot L\left(\frac{m_B - x}{\alpha_B}\right) & \text{gdy } x \leq m_B \\ h & \text{gdy } m_B \leq x \leq n_B, \\ h \cdot R\left(\frac{x - n_B}{\beta_B}\right) & \text{gdy } x \geq n_B \end{cases}, \quad (18)$$

gdzie

$$h = \left(\int_{m_B - \alpha_B}^{m_B} L\left(\frac{m_B - x}{\alpha_B}\right) dx + (n_B - m_B) + \int_{n_B}^{n_B + \beta_B} R\left(\frac{x - n_B}{\beta_B}\right) dx \right)^{-1}. \quad (19)$$

W przypadku trójkątnej liczby rozmytej A o funkcji przynależności (9) funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_A(x)$ związana z tą liczbą ma postać:

$$f_A(x) = \begin{cases} h \cdot \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ h \cdot \frac{c-x}{c-b} & \text{gdy } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{gdy } x \leq a \vee x \geq c \end{cases}, \text{ gdzie } h = \frac{2}{c-a}. \quad (20)$$

Dla trapezowej liczby rozmytej B o funkcji przynależności (10) funkcja gęstości prawdopodobieństwa wygląda następująco:

$$f_B(x) = \begin{cases} h \cdot \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ h & \text{gdy } b \leq x \leq c \\ h \cdot \frac{d-x}{d-c} & \text{gdy } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{gdy } x \leq a \vee x \geq d \end{cases}, \text{ gdzie } h = \frac{2}{d+c-b-a}. \quad (21)$$

Na rysunku 2a pokazano trójkątną liczbę rozmytą $(1; 4; 6)$, a na rysunku 2b trapezową liczbę rozmytą $(1; 4; 7; 9)$ oraz związane z nimi ich funkcje gęstości prawdopodobieństwa otrzymane za pomocą przekształceń odpowiednio (20) i (21).

4.1. Transformata Mellina

Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa określoną dla $x > 0$. Transformata Mellina funkcji $f(x)$ dana jest wzorem:

$$M_x(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx, \quad 0 < x < \infty, \quad (22)$$

gdzie s jest liczbą zespoloną. Jeżeli zależność (22) porówna się z wartością oczekiwaną funkcji $g(X)$ nieujemnej zmiennej losowej X , o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$, wyrażonej zależnością:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad (23)$$

wówczas otrzyma się:

$$M_x(s) = E(X^{s-1}) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (24)$$

Zależność (24) pozwala na następujące wyznaczenie dwóch podstawowych momentów, tzn. wartości oczekiwanej i wariancji, za pomocą transformaty Mellina:

- wartość oczekiwana

$$m_1 = E(X) = M_x(2), \quad (25)$$

- wariancja

$$\sigma^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = M_x(3) - [M_x(2)]^2. \quad (26)$$

Wyznaczone za pomocą zależności (25) i (26) charakterystyki liczbowe pozwalają na liniowe uporządkowanie liczb rozmytych. W pierwszej kolejności o pozycji w rankingu decyduje wartość oczekiwana. Im wyższa jest jej wartość, tym wyższa pozycja w rankingu. Jeżeli wartości oczekiwane są jednakowe, to wyższą pozycję wskazuje mniejsza wartość wariancji.

W częściach 4.2 oraz 4.3 przedstawiono: zależności na stałą proporcjonalności h we wzorze (15), transformatę Mellina $M_x(s)$ (24), wartość oczekiwaną m_1 (25) oraz wariancję σ^2 (26) dla liczb rozmytych trójkątnych i trapezowych.

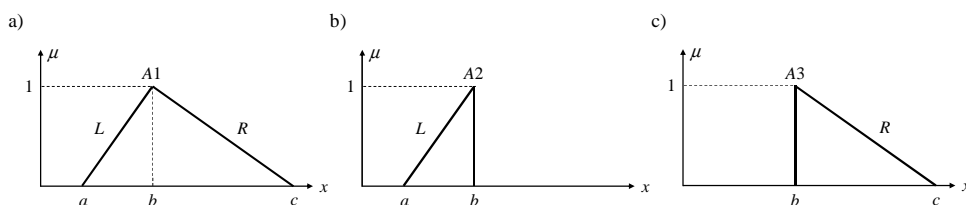
4.2. Trójkątne liczby rozmyte

Trójkątne liczby rozmyte o funkcji przynależności (9) można podzielić na trzy grupy (rys. 3):

- liczby postaci $A1 = (a; b; c)$, gdzie $L(x) \neq 0$ i $R(x) \neq 0$ (rys. 3a);
- liczby postaci $A2 = (a; b; b)$, gdzie $R(x) = 0$ (rys. 3b);
- liczby postaci $A3 = (b; b; c)$, gdzie $L(x) = 0$ (rys. 3c).

Wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 , σ^2 zestawiono w tabeli 1.

Rys. 3. Funkcje przynależności trójkątnych liczb rozmytych: a) $A1 = (a; b; c)$,
b) $A2 = (a; b; b)$, c) $A3 = (b; b; c)$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Trójkątne liczby rozmyte oraz ich wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 , σ^2 .

Trójkątna liczba rozmyta A_i ($i = 1,2,3$)	Wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 , σ^2 trójkątnych liczb rozmytych A_i ($i = 1,2,3$)
$A1 = (a; b; c)$	$h = \frac{2}{c-a}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(c-a)} \left(\frac{c(c^s - b^s)}{c-b} - \frac{a(b^s - a^s)}{b-a} \right)$
	$m_1 = \frac{1}{3}(a+b+c)$
	$\sigma^2 = \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
$A2 = (a; b; b)$	$h = \frac{2}{b-a}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(b-a)} \left(sb^s - \frac{a(b^s - a^s)}{b-a} \right)$
	$m_1 = \frac{1}{3}(a+2b)$
	$\sigma^2 = \frac{1}{18}(a-b)^2$
$A3 = (b; b; c)$	$h = \frac{2}{c-b}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(c-b)} \left(\frac{c(c^s - b^s)}{c-b} - sb^s \right)$
	$m_1 = \frac{1}{3}(2b+c)$
	$\sigma^2 = \frac{1}{18}(b-c)^2$

Źródło: opracowanie własne.

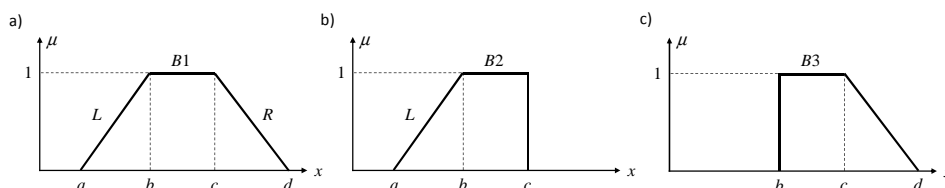
4.3. Trapezowe liczby rozmyte

Trapezowe liczby rozmyte o funkcji przynależności (10) można również podzielić na trzy grupy (rys. 4):

- liczby postaci $B1 = (a; b; c; d)$, gdzie $L(x) \neq 0$ i $R(x) \neq 0$ (rys. 4a);
- liczby postaci $B2 = (a; b; c; c)$, gdzie $R(x) = 0$ (rys. 4b);
- liczby postaci $B3 = (b; b; c; d)$, gdzie $L(x) = 0$ (rys. 4c).

Wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 zestawiono w tabeli 2 (ze względu na dużą złożoność pominięto wzory na wariancję $-\sigma^2$).

Rys. 4. Funkcje przynależności trapezowych liczb rozmytych: a) $B1 = (a; b; c; d)$, b) $B2 = (a; b; c; c)$, c) $B3 = (b; b; c; d)$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Trapezowe liczby rozmyte oraz ich wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 .

Trapezowa liczba rozmyta Bi ($i = 1,2,3$)	Wyznaczone zależności na h , $M_x(s)$, m_1 trapezowych liczb rozmytych Bi ($i = 1,2,3$)
$B1 = (a; b; c; d)$	$h = \frac{2}{d + c - b - a}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(d+c-b-a)} \left(\frac{d^{s+1} - c^{s+1}}{d-c} - \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{b-a} \right)$
	$m_1 = \frac{d^2 + c^2 - b^2 - a^2 + cd - ab}{3(d+c-b-a)}$
$B2 = (a; b; c; c)$	$h = \frac{2}{2c - b - a}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(2c-b-a)} \left((s+1)c^s - \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{b-a} \right)$
	$m_1 = \frac{3c^2 - b^2 - a^2 - ab}{3(2c-b-a)}$
$B3 = (b; b; c; d)$	$h = \frac{2}{d + c - 2b}$
	$M_x(s) = \frac{2}{s(s+1)(d+c-2b)} \left(\frac{d^{s+1} - c^{s+1}}{d-c} - (s+1)b^s \right)$
	$m_1 = \frac{d^2 + c^2 - 3b^2 + cd}{3(d+c-2b)}$

Źródło: opracowanie własne.

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ PROPONOWANEJ METODY

Zastosowanie metody SAW i FSAW jest bardzo szerokie. Abdullah i Adawiyah²⁷ opisują następujące obszary ich zastosowań: zarządzanie (52,63%), technologie informacyjne (10,53%), zdrowie (10,53%), edukacja (5,26%), inżynieria (5,26%). W rozdziale przedstawiono przykłady zastosowania proponowanej metody FSAW w zarządzaniu przedsiębiorstwem – podczas podejmowania decyzji w ujęciu wielokryterialnym.

Typowa liczba terminów lingwistycznych wykorzystywanych do oceny wariantów decyzyjnych jest nieparzysta (np. siedem czy dziewięć) i nie większa niż 13²⁸. W przykładach 1 i 2 zastosowano siedmiostopniową skalę lingwistyczną (zob. tab. 3 i 6).

5.1. Przykład 1

Pierwszy przykład to podział premii w dziale sprzedaży przedsiębiorstwa zajmującego się produkcją maszyn i urządzeń do obróbki PCV. Celem przedsiębiorstwa – oprócz maksymalizacji zysku ze sprzedaży – jest pozyskiwanie nowych klientów oraz utrzymanie dotychczasowych przez proponowanie im coraz to lepszych rozwiązań technologicznych i unowocześnień. Dział sprzedaży zatrudnia pięć osób, których oznaczono odpowiednio symbolami $H1$ – $H5$. Pracownicy otrzymują premie uznaniowe w zależności od jakości wykonywanych obowiązków w okresie półrocznym. Kwota 10 000 zł stanowi łączną kwotę premii przeznaczoną do podziału pomiędzy wszystkich pracowników działu sprzedaży. Do oceny jakości wykonywanych obowiązków uwzględniane są następujące kryteria: zaangażowanie w realizację kluczowych projektów – $K1$, łączna kwota sprzedaży – $K2$, zaangażowanie w organizację spotkań z klientami strategicznymi – $K3$, liczba przepracowanych godzin – $K4$, wykonywanie zadań dodatkowych – $K5$. Podczas oceny uwzględniona jest istotność poszczególnych kryteriów w postaci następującego wektora wag: $W = (0,25; 0,30; 0,20; 0,10; 0,15)$. Na podstawie dokumentacji realizacji zadań w dziale sprzedaży oraz własnych obserwacji kierownik przedsiębiorstwa dokonuje oceny pracowników względem poszczególnych kryteriów, z uwzględnieniem terminów lingwistycznych zawartych w tabeli 3.

Tabela 3. Terminy lingwistyczne wykorzystywane do oceny realizacji zadań przez pracowników działu sprzedaży

Terminy lingwistyczne	Skrót	Trójkątna liczba rozmyta w notacji $(a; b; c)$
Bardzo słaba	BS	$(0;0;0,1)$
Słaba	S	$(0;0,1;0,3)$
Średnio słaba	SS	$(0,1;0,3;0,5)$
Dostateczna	DT	$(0,3;0,5;0,7)$
Średnio dobra	SD	$(0,5;0,7;0,9)$
Dobra	DB	$(0,7;0,9;1)$
Bardzo dobra	BD	$(0,9;1;1)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: C.T. Chen, *Extension of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, „Fuzzy Sets and Systems” 2000/114, s. 1–9.

²⁷ L. Abdullah, C.W.R. Adawiyah, *Simple additive weighting methods of multicriteria decision making and applications: a decade review*, „International Journal of Information Processing and Management” 5/1 (2014), s. 39–49.

²⁸ B.B. Bonissone, K.S. Decker, *Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity*, [w:] *Uncertainty in Artificial Intelligence*, red. L.H. Kanal, J.F. Lemmer, North-Holland, Amsterdam 1986, s. 217–247; F. Herrera, E. Herrera-Viedma, *op. cit.*

Wyniki ocen kierownika zamieszczono w tabeli 4. W tabeli 5 zestawiono uzyskane wyniki końcowe: na podstawie (13) przedstawiono trójkątną liczbę rozmytą określającą zagregowaną ocenę realizacji zadań przez pracownika – $FS_f(Hm)$, jej wartość oczekiwaną – m_1 oraz wariancję – σ^2 . W wyniku normalizacji wartości oczekiwanej (obliczenia ilorazów wartości oczekiwanej każdego pracownika i sumy wartości oczekiwanych dla wszystkich pracowników) wyznaczono strukturę podziału kwoty ogólnej premii (10 000 zł) na poszczególnych pracowników działu sprzedaży jako proporcjonalny podział kwoty ogólnej w stosunku do wartości oczekiwanej poszczególnego pracownika. Na tej podstawie obliczono kwoty premii uznaniowej dla wszystkich pracowników.

W wyniku obliczeń można ustalić również ranking poszczególnych pracowników według jakości ich pracy w przedsiębiorstwie. Uzyskany ranking ma postać: $H4 < H3 < H2 < H1 < H5$. Uszeregowanie to ma również odzwierciedlenie w przyznanych kwotach premii. Najwyższą kwotę premii (2 515,04 zł) przyznano pracownikowi $H5$, najniższą (1 525,42 zł) – pracownikowi $H4$.

Tabela 4. Wyniki oceny realizacji zadań przez pracowników działu sprzedaży względem poszczególnych kryteriów

		Oceny pracowników względem poszczególnych kryteriów				
		K1	K2	K3	K4	K5
Pracownicy działu sprzedaży	H1	DT	DB	SD	SS	DT
	H2	SD	DT	BD	DT	SS
	H3	SD	DT	DB	SS	SS
	H4	S	SS	DT	BD	BD
	H5	BD	DB	DB	DB	BS

Źródło: opracowanie własne

Tabela 5. Zagregowane wyniki oceny realizacji zadań przez pracowników działu sprzedaży względem poszczególnych kryteriów oraz rozdział premii uznaniowej

		$FS_f(Hm)$			m_1	σ^2	Procentowy podział premii	Kwota premii
Pracownicy działu sprzedaży	H1	0,440	0,640	0,810	0,630	0,005717	20,67%	2 066,70 zł
	H2	0,440	0,620	0,780	0,613	0,004822	20,12%	2 012,03 zł
	H3	0,380	0,580	0,760	0,573	0,006022	18,81%	1 880,81 zł
	H4	0,315	0,465	0,615	0,465	0,003750	15,25%	1 525,42 zł
	H5	0,645	0,790	0,865	0,767	0,002085	25,15%	2 515,04 zł

Źródło: opracowanie własne.

5.2. Przykład 2

Drugi przykład to proces decyzyjny związany z realizacją projektów innowacyjnych. Działania z perspektywy projektów innowacyjnych wymuszają analizę potencjalnych zagrożeń, co z kolei wiąże się z oceną ryzyka. Analizowaną w artykule metodę zastosowano do określenia ważności kryteriów oceny, jednego z etapów oceny ryzyka. W tym

celu zestawiono zbiór kryteriów ogólnych²⁹: wielkość przedsiębiorstwa – $H1$, skala innowacji – $H2$, okres stosowania technologii na świecie – $H3$, okres realizacji projektu – $H4$, relacja zewnętrznych źródeł finansowania do wielkości całego projektu – $H5$. Analiza tych czynników ma na celu określenie ogólnego stopnia ryzyka w kontekście całego przedsiębiorstwa, które podjęło się inwestycji. Grupa siedmiu ekspertów ($E1 - E7$) została poproszona o wyrażenie swoich opinii na temat ważności wymienionych kryteriów z perspektywy oceny ryzyka projektów innowacyjnych. Ekspertcy oceniali kryteria z uwzględnieniem terminów lingwistycznych wymienionych w tabeli 6. Dodatkowo, z punktu widzenia indywidualnych uwarunkowań psychologicznych ekspertów określono istotność poszczególnych opinii, otrzymując następujący wektor wag: $W = (0,2; 0,2; 0,2; 0,15; 0,15; 0,05; 0,05)$. Ekspertami byli pracownicy przedsiębiorstw realizujących projekty innowacyjne oraz instytucji publicznych prowadzących projekty związane z dofinansowaniami innowacyjnych przedsięwzięć. Wyniki w postaci lingwistycznych ocen poszczególnych kryteriów ogólnych zamieszczono w tabeli 7.

Tabela 6. Terminy lingwistyczne wykorzystywane do określenia ważności kryteriów ogólnych

Terminy lingwistyczne	Skrót	Trapezowa liczba rozmyta w notacji ($a; b; c; d$)
Najmniej ważne	MNW	(0;0;0,1;0,2)
Mało ważne	MW	(0;0;0,2;0,3)
Nieco mniej ważne	NMW	(0,1;0,2;0,3;0,4)
Ważne	W	(0,3;0,4;0,6;0,7)
Nieco bardziej ważne	NBW	(0,6;0,7;0,8;0,9)
Bardzo ważne	BW	(0,7;0,8;1;1)
Najważniejsze	NW	(0,8;0,9;1;1)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. Wyniki oceny ważności kryteriów $H1 - H5$ uzyskane od siedmiu ekspertów $E1 - E7$

		Oceny ważności kryteriów nadane przez ekspertów						
		$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$
Kryteria ocen ny ryzyka	$H1$	NMW	NW	NBW	NMW	NMW	W	NMW
	$H2$	NW	BW	MW	NBW	NBW	BW	NBW
	$H3$	BW	W	NMW	NBW	NBW	NBW	NBW
	$H4$	MW	W	BW	NMW	NMW	NMW	NMW
	$H5$	NMW	W	BW	NMW	W	NMW	W

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie właściwej funkcji agregacji (13) wyliczono liczby rozmyte określające zagregowane oceny istotności ogólnych kryteriów, dotyczących projektów innowacyjnych. Liczby te wraz z ich wartością oczekiwaną (m_1), wariancją (σ^2) i pozycją rankingową (RANK) zamieszczono w tabeli 8. Wyniki analizy wskazują, że w grupie kryteriów ogólnych występuje następujący ranking ich wag: $H4 < H5 < H1 < H3 < H2$. Oznacza

²⁹ K. Rudnik, A. M. Deptuła, System with probabilistic fuzzy knowledge base and parametric inference operators in risk assessment of innovative projects, „Expert Systems with Applications” 42/17–18 (2015), s. 6365–6379.

to, że z perspektywy oceny ryzyka projektów innowacyjnych należy brać pod uwagę czynniki w następującej hierarchii ich istotności: skala innowacji, okres stosowania technologii na świecie, wielkość przedsiębiorstwa, relacja zewnętrznych źródeł finansowania do wielkości całego projektu, okres realizacji projektu.

Tabela 8. Zagregowane wyniki oraz ranking ocen ważności kryteriów ogólnych oceny projektów innowacyjnych z perspektywy ich ryzyka

		$FS_f(Hm)$				m_1	σ^2	RANK
Kryteria ocen ryzyka	H1	0,350	0,450	0,555	0,635	0,497	0,003851	3
	H2	0,545	0,625	0,770	0,825	0,691	0,004155	1
	H3	0,460	0,560	0,700	0,780	0,624	0,005091	2
	H4	0,240	0,320	0,480	0,560	0,400	0,005333	5
	H5	0,300	0,400	0,560	0,640	0,474	0,005891	4

Źródło: opracowanie własne.

6. PODSUMOWANIE

W artykule zaprezentowano wykorzystanie transformaty Mellina do liniowego porządkowania wariantów decyzyjnych w rozmytej metodzie SAW. Dzięki wykorzystaniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa związanej z liczbą rozmytą można policzyć wybrane charakterystyki liczbowe, na przykład wartość oczekiwaną i wariancję, które są podstawą rankingu. Szczególną zaletą prezentowanej metody jest uwzględnienie klasy funkcji L i R , a nie tylko kilku wybranych argumentów. Z tego względu może być to alternatywa dla powszechnie stosowanych metod defuzyfikacji w metodach MADM, bazujących na wartościach granicznych jądra i nośnika. Prezentowane przykłady pokazują skuteczność wykorzystania transformaty Mellina w rozmytej metodzie SAW.

LITERATURA

- [1] Abdullah L., *Developing decision on suitable wastewater treatment technology using fuzzy simple additive weighting*, "International Journal of Engineering and Technology" 7/2 (2015), s. 405–413.
- [2] Abdullah L., Adawiyah C.W.R., *Simple additive weighting methods of multicriteria decision making and applications: a decade review*, „International Journal of Information Processing and Management” 5/1 (2014), s. 39–49.
- [3] Bonissone P.P., *A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications*, [w:] *Approximate reasoning in decision analysis*, red. M.M. Gupta i E. Sanchez, North-Holland, Amsterdam 1982, s. 329–339.
- [4] Bonissone B.B., Decker K.S., *Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity*, [w:] *Uncertainty in Artificial Intelligence*, red. L.H. Kanal, J.F. Lemmer, North-Holland, Amsterdam 1986, s. 217–247.
- [5] Chen C.T., *Extension of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, „Fuzzy Sets and Systems” 2000/114, s. 1–9.
- [6] Chen S.-J., Hwang C.-L., *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, „Lecture Notes in Economics and mathematical Systems” 1992/375.
- [7] Churchman C.W., Ackoff R.L., Arnoff E.L., *Introduction to operations research*, Wiley, New York 1957.

- [8] Deni W., Sudana O., Sasmita A., *Analysis and implementation fuzzy multi-attribute decision making SAW method for selection of high achieving students in faculty level*, „IJCSI International Journal of Computer Science Issues” 10/1–2 (2013), s. 674–680.
- [9] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York 1980.
- [10] Gupta M.M., Qi J., *Theory of T-norms and fuzzy inference methods*, „Fuzzy Sets and Systems” 1991/40, s. 431–450.
- [11] Herrera F., Herrera-Viedma E., *Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information*, „Fuzzy Sets and Systems” 2000/115, s. 67–82.
- [12] Hwang C.-L., Yoon K., *Multiple Attribute Decision Making*, „Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems” 1981/186.
- [13] Kacprzyk J., *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.
- [14] Prusak A., Stefanów P., Gardian M., *Graficzna forma kwestionariusza w badaniach AHP/ANP*, „Modern Management Review” XVIII/20 (2013), s. 171–189.
- [15] Rudnik K., Deptuła A. M., *System with probabilistic fuzzy knowledge base and parametric inference operators in risk assessment of innovative projects*, „Expert Systems with Applications” 42/17–18 (2015), s. 6365–6379.
- [16] Yoon K.P., *A probabilistic approach to rank complex fuzzy numbers*, „Fuzzy Sets and Systems” 1996/80, s. 167–176.
- [17] Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, „Information and Control” 1965/8, s. 338–353.
- [18] Zimmermann H.J., *Fuzzy Set Theory and Applications*, wyd. 4, Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht–London 2001.

RANK THE DECISION VARIANTS USING MELLIN TRANSFORM IN FUZZY SAW METHOD

The paper presents the use of Mellin transform to compare triangular and trapezoidal fuzzy numbers, which are used to linguistic description of variants in the fuzzy SAW method. The proposed method is based on the probability density function (PDF) associated with the fuzzy number, which is obtained after proportional transformation. The method uses Mellin transform to determine the expected value and the variance of fuzzy number. This numerical characteristics allow to rank fuzzy numbers and also rank the variants in fuzzy SAW method. The ranking is determined by the expected value (the higher the value, the higher rank). If the expected values are equal, the less variance value indicates a higher ranking. In particular, the paper presents dependences on a proportionality constant to determine the probability density function associated with the fuzzy number, Mellin transform, the expected value and the variance for the triangular and trapezoidal fuzzy numbers. The advantage of the proposed method is the possibility to take into account the R and L function in the definition of fuzzy numbers, not just a few selected arguments. Therefore, the proposed method of ranking the variants can be an alternative for defuzzification methods in the fuzzy multi attribute decision making methods FMADM, based on the limit values of the core and the support. The paper presents two examples of the proposed method in the area of an enterprise management to make fuzzy multi criteria decisions. The presented examples show the efficiency of using Mellin transform in the fuzzy SAW method.

Keywords: fuzzy SAW method, Mellin transform, Fuzzy Multi Attribute Decision Making, FMADM, triangular fuzzy numbers, trapezoidal fuzzy numbers

DOI: 10.7862/rz.2015.mmr.36

Tekst złożono w redakcji: czerwiec 2015

Przyjęto do druku: wrzesień 2015