

Joanna KUJDA¹
Lidia BUDA-OŻÓG²

ANALIZA NIEZAWODNOŚCI TARCZ ŻELBETOWYCH PROJEKTOWANYCH METODĄ ST

W artykule przedstawiono wyniki analiz i symulacji numerycznych tarczy trój-przęsłowej projektowanej metodą kratownicową z uwzględnieniem struktury niezawodnościowej dla zaproponowanych trzech różnych modeli ST. Badano poziom niezawodności poszczególnych układów kratownicowych oraz zachowanie się konstrukcji pod obciążeniem w przypadku zastosowania odpowiadających rozwiązaniom modelom ST trzech różnych układów zbrojenia. Przeprowadzona analiza wykazała, że mając na uwadze niezawodność jako cel nadrzędny podczas projektowania konstrukcji, zastosowanie metody kratownicowej w analizie elementów o nieliniowym przebiegu naprężeń daje bezpieczne rozwiązania.

Słowa kluczowe: model ST, beton, niezawodność, tarcza, symulacja numeryczna

1. Wprowadzenie

Niektóre elementy konstrukcji z betonu projektuje się z bardzo dużą dokładnością a inne jedynie na podstawie intuicji lub poglądów opartych na doświadczeniu. Ponieważ wszystkie elementy konstrukcji wydają się być jednakowo ważne, istnieje potrzeba wypracowania jednolitego podejścia obliczeniowego; prawdziwego dla wszystkich rodzajów rozpatrywanego ustroju nośnego i jego poszczególnych części, a przy tym bazującego na takich samych modelach fizycznych [1] [2].

Spełnienie przytoczonych kryteriów staje się możliwe w metodzie analogii prętowej – zwanej ST. Model ST składa się z prętów- T, odwzorowujących zbrojenie rozciągane oraz ściskanych prętów S, odwzorowujących wyodrębnione obszary betonu. Pręty S i T połączone są w odpowiednio ukształtowanych węzłach, umożliwiających zakotwienie zbrojenia rozciąganego i przeniesienie naprężeń ściskających [3].

¹ Autor do korespondencji / corresponding author: Joanna Kujda, Politechnika Rzeszowska, Katedra Konstrukcji Budowlanych, Al. Powstańców Warszawy 12, 698 757 563, j.kujda@prz.edu.pl

² Lidia Buda-Ożóg, Politechnika Rzeszowska, Katedra Konstrukcji Budowlanych, Al. Powstańców Warszawy 12, lida@prz.edu.pl

Eurokod [4] zaleca stosowanie tej metody w projektowaniu konstrukcji żelbetowych i sprężonych, w obszarach dwuosioowego rozkładu naprężeń, to jest na przykład w krótkich wspornikach, narożach ram, strefach przypodporowych belek czy tarczownicach. W swej początkowej wersji metoda ST była stosowana do uproszczonych obliczeń konstrukcji żelbetowych o skomplikowanych kształtach, pracujących w złożonym stanie naprężenia. Obecnie, gdy szerokie zastosowanie w analizie konstrukcji ma Metoda Elementów Skończonych, metoda modeli prętowych może wydawać się przestarzała i nieefektywna. Ponieważ jednak w wielu obszarach konstrukcji żelbetowych z silnymi nieciągłościami, konstruktor musi zaprojektować zbrojenie opierając się na pewnych regułach a nie na samej tylko analizie MES, metoda ST pozwala na wiarygodne określenie tych reguł. Jest to zatem dodatkowe narzędzie przydatne do nowoczesnego, prawidłowego i oszczędnego projektowania. W skomplikowanych przypadkach, w celu osiągnięcia większej dokładności zastosowanego modelu prętowego, w podejściu tego typu korzysta się zresztą także z analizy MES.

Analizę konstrukcji za pomocą modeli ST zalicza się do metod analizy plastycznej. Jest ona oparta na twierdzeniu o dolnej granicy obciążenia w ujęciu teorii nośności granicznej, a zatem otrzymane w ten sposób nośności są oszacowaniami bezpiecznymi. Zalecenia normowe oraz literatura nie podają metod pozwalających na jednoznaczne określenie w metodzie ST kształtu i kierunku modelowanych prętów. Wyboru najbardziej odpowiedniego modelu ST w zależności od rozważanego zagadnienia można dokonać wykorzystując analogie kratownicy zastępczej, strumienie sił [5], trajektorie naprężeń, modele numeryczne oraz tak zwaną optymalizację topologiczną [6].

Model ST może być dostosowany do każdej geometrii ustroju nośnego i każdego rozkładu naprężeń. Ta wszechstronność jest uważana za główną zaletę modeli ST, jednocześnie za duże wyzwanie. Elastyczność ich zastosowania dla projektanta, może bowiem prowadzić do niepewności czy przyjęty dla konkretnej konstrukcji model kratownicowy jest właściwy uwzględniając przyjęte kryteria wyboru. Najczęściej stosowanym kryterium jest z reguły optymalizacja topologiczna układu. Prowadzi się ją jednak z pominięciem oceny niezawodności otrzymanego w ten sposób modelu. A to właśnie projektowanie konstrukcji bezpiecznych powinno być nadrzędnym celem w procesie projektowania. Niezawodność konstrukcji jest przy tym ściśle powiązana ze sposobami traktowania niepewności, a także podejmowaniem decyzji w fazie koncepcyjnej [7]. Z kolei kwantyfikacja niepewności jest ściśle związana z doбором podstawowych zmiennych stanu konstrukcji. Są to przykładowo: wymiary geometryczne, właściwości mechaniczne materiałów konstrukcyjnych, obciążenia czy sposób ukształtowania zbrojenia.

Mając na uwadze niezawodność jako cel nadrzędny podczas projektowania konstrukcji w niniejszym artykule porównano niezawodność tarcz o zbrojeniu ukształtowanym na podstawie trzech różnych modeli ST. Z uwagi na to, że przy modelowaniu konstrukcji metodą analogii kratownicowej nie kontroluje się za-

rysowania w celu sprawdzenia stanu granicznego użyteczności analizowanych tarcz przeprowadzono symulacje numeryczne w programie ATENA.

2. Podstawy oceny niezawodności systemów

Statycznie wyznaczalne modele kratownicowe odpowiadają systemowi o prostej strukturze szeregowej, ponieważ zniszczenie jednego elementu powoduje w nich awarię całej konstrukcji. Natomiast kratownica wewnętrznie statycznie niewyznaczalna może odpowiadać systemowi o mieszanej, równoległo-szeregowej strukturze niezawodności. Zawodności dla poszczególnych modeli przytoczonych powyżej można obliczyć z zależności [8], [9], [10], odpowiednio:

- dla systemu szeregowego:

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{fi}) \quad (1)$$

- dla systemu równoległego:

$$P_f = \prod_{i=1}^n P_{fi} \quad (2)$$

gdzie:

P_{fi} – prawdopodobieństwa wyczerpania nośności poszczególnych elementów rozpatrywanego systemu,
 n – liczba elementów.

Miarą niezawodności jest dopełnienie prawdopodobieństwa wyczerpania nośności:

$$q = 1 - P_f. \quad (3)$$

W świetle wymagań PN-EN 1990 [11] przyjęty model nośności powinien być ukształtowany tak, aby zapewnić odpowiedni poziom bezpieczeństwa konstrukcji, co oznacza spełnienie warunku niezawodności w postaci:

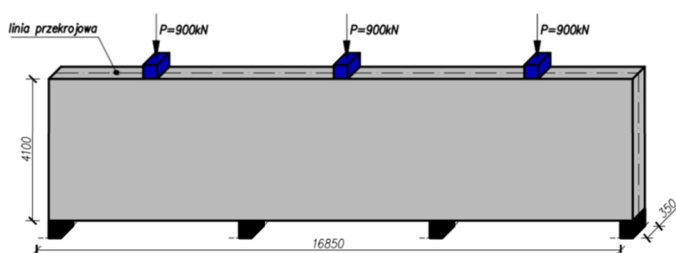
$$\beta \geq \beta_d \quad (4)$$

gdzie:

β – obliczona wartość globalnego wskaźnika niezawodności,
 β_d – graniczna wartości wskaźnika niezawodności zależna od wymagań (nośność lub użytkowanie) oraz przewidywanego okresu użytkowania.

3. Charakterystyka tarczy żelbetowej

Przedmiotem szczegółowej analizy była trójprzęsłowa tarcza żelbetowa o rozpiętości przęsła 5,5 m, wysokości 4,10 m i szerokość 0,35 m. Tarcza ta stanowi podporę dla opartych na niej elementów belkowych. Obciążenie przekazywane z belek o szerokości 40 cm zastąpiono siłami skupionymi i przyłożonymi w środku rozpiętości każdego z przęseł tarczy, według schematu pokazanego na Rys.1.



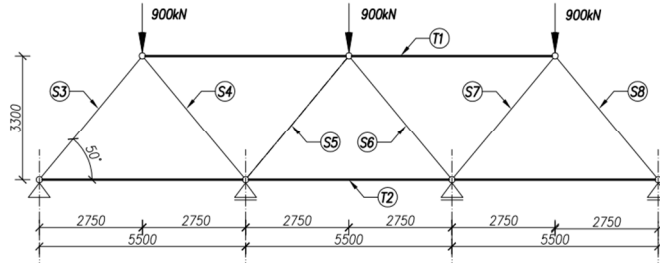
Rys. 1. Schemat tarczy rozpatrywanej w przykładzie

Fig. 1. Scheme of the shield considered in the example

Przyjęto następujące właściwości materiałowe i parametry obciążenia:

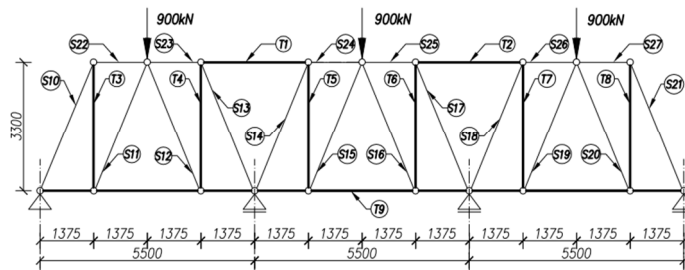
- stal zbrojeniowa
 $f_{ym} = 575 \text{ MPa}$, $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$; $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $v_y = 0,08 = 8\%$
 $\sigma_y = v_y \cdot f_{ym} = 0,08 \cdot 575 = 46 \text{ MPa}$
- beton C30/37
 $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$; $f_{cd} = 21,43 \text{ MPa}$, $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$, $\sigma_c = 4,86 \text{ MPa}$
- obciążenia:
 $v_p = 0,15$, $p_d = 900 \text{ kN}$; $p_k = 667 \text{ kN}$
 $\bar{p} = p_k / (1 + 1,645 v_p) = 667 / (1 + 1,645 \cdot 0,15) = 535 \text{ kN}$
 $\sigma_p = v_p \cdot \bar{p} = 0,15 \cdot 535 = 80,21 \text{ MPa}$

Korzystając z nieodpłatnego programu CAST do optymalizacji kształtu kratownicy zastępczej, na podstawie obrazu trajektorii naprężeń głównych, przyjęto trzy modele ST analizowanej tarczy. Pierwszy model, oznaczony symbolem ST1, stanowi najprostsza konstrukcja prętowa, statycznie wyznaczalna, z rozciąganymi tylko prętami poziomymi. Drugi model, oznaczony symbolem ST2, to konstrukcja prętowa również statycznie wyznaczalna ale z rozciąganymi prętami poziomymi i pionowymi. Trzeci model to konstrukcja prętowa statycznie niewyznaczalna, z rozciąganymi prętami poziomymi i pionowymi. Rozpatrywane modele przedstawiono schematycznie na rysunkach: Rys.2, Rys.3, Rys.4.



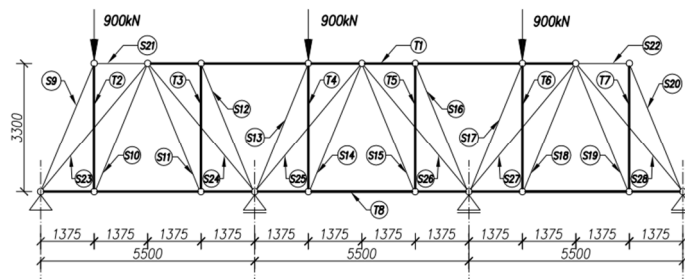
Rys. 2. Schemat modelu ST1

Fig. 2. Scheme of the model ST1



Rys. 3. Schemat modelu ST2

Fig. 3. Scheme of the model ST2



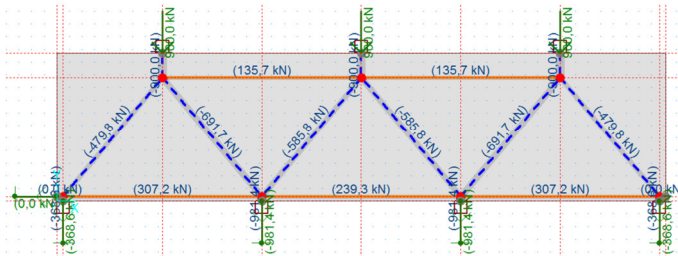
Rys. 4. Schemat modelu ST3

Fig. 4. Scheme of the model ST3

Analizę modeli przeprowadzono iteracyjnie w programie CAST [12] z uwzględnieniem sztywności elementów oraz sprawdzeniem warunków w węzłach. Prętom rozciągającym nadano charakterystyki prętów zbrojeniowych wynikających z przeprowadzonych obliczeń, natomiast prętom ściskającym nadano kształt butelkowy, ograniczając wartości przenoszonych przez nie naprężeń do poziomu:

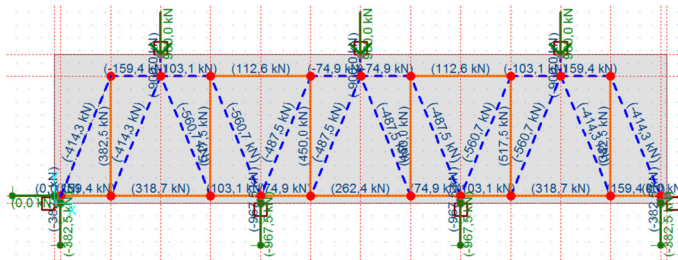
$$\sigma_{cd,max} = v \cdot f_{cd} = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} = 11,31 \text{ MPa} \quad (5)$$

Uzyskane siły przekrojowe i reakcje dla analizowanych modeli pokazano na rysunkach: Rys.5a, Rys.5b, Rys.5c.



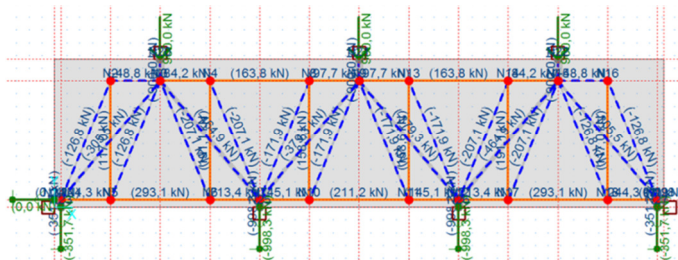
Rys. 5a. Siły osiowe oraz reakcje podporowe w prętach modelu kratowniczego ST1

Fig. 5a. Axial forces and support reactions in the rods of the truss of ST1 model



Rys. 5b. Siły osiowe oraz reakcje podporowe w prętach modelu kratowniczego ST2

Fig. 5b. Axial forces and support reactions in the rods of the truss of ST2 model



Rys. 5c. Siły osiowe oraz reakcje podporowe w prętach modelu kratowniczego ST3

Fig. 5c. Axial forces and support reactions in the rods of the truss of ST3 model

Na podstawie otrzymanych z obliczeń wartości sił przekrojowych w każdym z analizowanych modeli wyznaczono powierzchnię przekroju poprzecznego, liczbę i kształt potrzebnego zbrojenia oraz sprawdzono warunki nośności węzłów.

Wymagane zbrojenie tarczy odpowiadające poszczególnym, rozpatrywanym w przykładzie modelom ST zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie zbrojenia tarczy wynikającego z analizy poszczególnych modeli ST

Table 1. Summary of the reinforcement of the shield resulting from the analysis of the individual ST models

Rodzaj zbrojenia	Model ST1	Model ST2	Model ST3
główne przeszłowe	4#16	3#16 + 2#16	5#12 + 2#12
główne podporowe	6#10	4#10	4#10 + 2#10
konstrukcyjne	#10 co 20 cm	#10 co 20 cm	#10 co 20 cm

4. Niezawodność modeli rozpatrywanych w przykładzie

W przeprowadzonych analizach przyjęto klasę niezawodności konstrukcji RC2 i okres użytkowania 50 lat, co determinuje graniczną wartość wskaźnika niezawodności na poziomie $\beta_d = 3,8$. Wskaźniki niezawodności analizowanej tarczy w zależności od przyjętego modelu ST, obliczono metodą probabilistyczną poziomu 2.

Pierwsza rozważana konstrukcja prętowa, opisana modelem ST1, ma szeregową strukturę niezawodnościową. Osiągnięcie stanu granicznego tego rodzaju konstrukcji zdefiniowano jako zniszczenie co najmniej jednego pręta i przemieszanie tego rodzaju konstrukcji w mechanizm. W przeprowadzonych analizach przyjęto pełną korelację dla poszczególnych elementów pasa górnego i dolnego rozpatrywanej kratownicy oraz brak korelacji pomiędzy krzyżulcami.

Dla poszczególnych elementów analizowanej kratownicy wyznaczono wskaźniki niezawodności β_i , ich niezawodności q_i oraz zawodności P_{fi} , które zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Niezawodność elementów modelu ST1

Table 2. Reliability of the members of the structure modeled by the ST1 model

Nr el.	A_{si} [mm ²]	β_i	q_i	P_{fi}
T1	471	7,4532	0,99999999999995	0,05e-12
T2	804	6,0189	0,9999999991219	8,78e-10
S3, S8	42407	4,8391	0,9999993478089	6,52e-07
S4, S7	61250	4,8449	0,9999993665380	6,33e-07
S5, S6	51800	4,8406	0,9999993526284	6,47e-07

Niezawodność całego systemu w tym przypadku wynosi zatem:

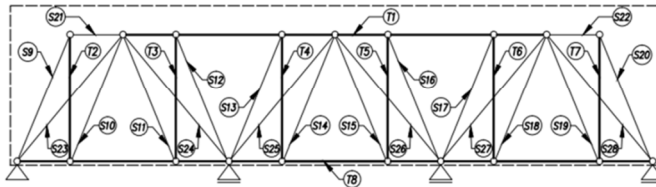
$$q = \prod_{i=1}^n q_i = q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 q_8 = 0,999996133079 \rightarrow \beta = 4,4724$$

Stąd zawodność:

$$P_f = 1 - q = 1 - 0,999996133079 = 0,39 \cdot 10^{-5}$$

Analogiczne obliczenia przeprowadzono dla modelu ST2. Otrzymano wskaźnik niezawodności na poziomie $\beta = 4,2575$, natomiast zawodność tego systemu wynosiła $P_f = 1,03 \cdot 10^{-5}$.

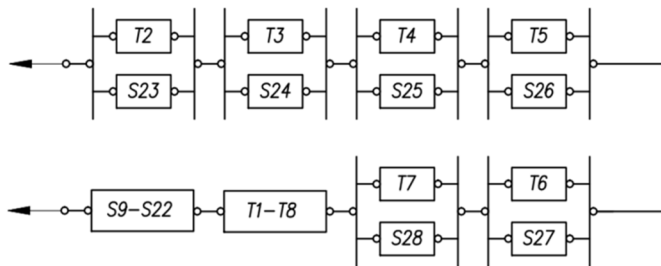
Trzecia rozważana konstrukcja prętowa ma równoległo - szeregową strukturę niezawodnościową. Osiągnięcie stanu granicznego tej konstrukcji zdefiniowano jako zniszczenie jednego z zestawu krzyżujących się ze sobą prętów kratownicy wraz z jednym z pozostałych jej elementów. Z prętów wyróżnionych pogrubioną linią na Rys.6 utworzono bloki, w których elementy systemu połączone są ze sobą w sposób równoległy.



Rys. 6. Oznaczenia elementów w modelu niezawodnościowym kratownicy ST3

Fig. 6. Designation of the members in the truss model ST3

Wydzielone bloki wraz z pozostałymi elementami rozpatrywanej kratownicy tworzą szeregową strukturę niezawodnościową przedstawioną szczegółowo na Rys.7.



Rys. 7. Schemat struktury niezawodnościowej elementów kratownicy ST3

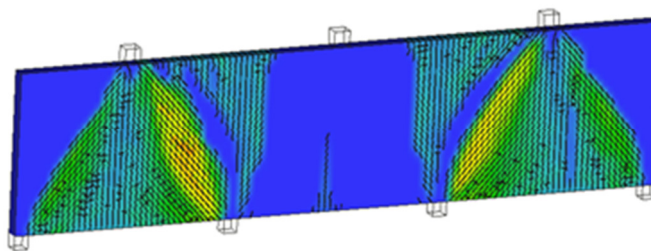
Fig. 7. Scheme of the structure of the truss ST3

Ostatecznie system modelowany kratownicą ST3 charakteryzował się wskaźnikiem niezawodności na poziomie:

$$\beta = 4,3245 \text{ i zawodnością: } P_f = 0,76 \cdot 10^{-5}.$$

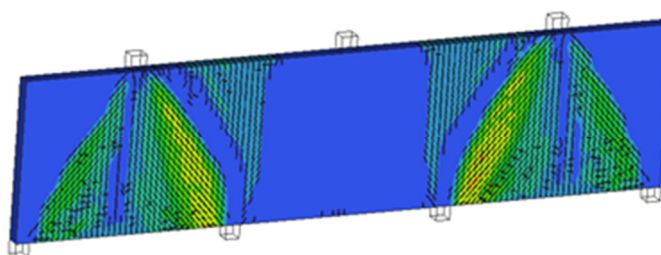
4. Numeryczna weryfikacja analizowanych tarczy

W celach kontrolnych w programie ATENA przeprowadzono symulacje numeryczne analizowanej tarczy. Wygenerowano trzy modele 3D wraz z odpowiednio dobranym zbrojeniem odpowiadającym poszczególnym, opisanym wcześniej, modelom kratownicowym. Analizowano stany graniczne nośności i użytkowości. Symulacje numeryczne wykazały, że zbrojenie przyjęte na podstawie modeli ST w każdym z analizowanych przypadków spełnia ze znacznym zapasem warunki nośności. Nie były również przekroczone dopuszczalne wartości naprężeń ściskających w betonie. Dla obciążenia na poziomie 900 kN nie zaobserwowano powstania istotnych zarysowań a pomierzone ugięcia analizowanych tarcz nie przekraczały wartości 0,5mm. Dopiero przy wzroście obciążenia do poziomu 2700 kN, zauważono wpływ ukształtowania zbrojenia na morfologię obserwowanego zarysowania. Morfologię takiego zarysowania przedstawiono na Rys.8, odpowiednio na Rys.8a dla kratownicy ST1, na Rys.8b dla kratownicy ST2 i na Rys.8c dla kratownicy ST3.



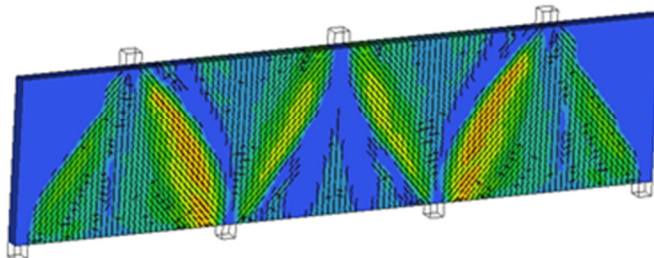
Rys. 8a. Mapy obserwowanego zarysowania dla obciążenia na poziomie 2,7MN dla modelu ST1

Fig. 8a. Crack patterns observed in the analysed shield for external load on the level 2,7MN for the truss ST1



Rys. 8b. Mapy obserwowanego zarysowania dla obciążenia na poziomie 2,7MN dla modelu ST2

Fig. 8b. Crack patterns observed in the analysed shield for external load on the level 2,7MN for the truss ST2



Rys. 8c. Mapy obserwowanego zarysowania dla obciążenia na poziomie 2,7MN dla modelu ST3

Fig. 8c. Crack patterns observed in the analysed shield for external load on the level 2,7MN for the truss ST3

5. Podsumowanie i wnioski

Wyniki przeprowadzonych analiz dotyczących kształtowania zbrojenia tarcz na podstawie modeli ST oraz weryfikację poziomu ich niezawodności zestawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Wyniki przeprowadzonych analiz

Table 3. Results from the performed analysis

Model	Całkowita masa użytej stali [kg]	Globalny wskaźnik niezawodności β
ST1	1216	4,4724
ST2	1204	4,2575
ST3	1170	4,3245

Przeprowadzona analiza numeryczna tej samej tarczy ale o różnie ukształtowanym zbrojeniu potwierdza, że projektowanie z zastosowaniem modeli ST pozwala na zapewnienie nośności elementu. Jest to jednak metoda wymagająca od projektanta umiejętności ukształtowania zbrojenia zgodnie z przewidywanym mechanizmem zniszczenia a także również z prognozowanym przebiegiem zarysowania.

Konstrukcje projektowane z wykorzystaniem modeli kratownicowych ST mają ściśle określoną strukturę niezawodnościową. Pozwala to na pewniejsze oszacowanie ich niezawodności. W tradycyjnym obliczaniu niezawodność konstrukcji jest równa niezawodności określonej w przekroju krytycznym, co może skutkować zawyżoną wartością globalnego wskaźnika niezawodności. W zależności od rozpatrywanego modelu kratownicowego, osiągnął on wartość odpowiednio: dla modelu kratownicy ST1 - $\beta = 4,47$, dla modelu kratownicy ST2 - $\beta = 4,26$, dla modelu kratownicy ST3 - $\beta = 4,32$. Największy wskaźnik niezawodności osiągnął zatem model kratownicowy ST1, charakteryzujący się naj-

prostsza strukturą niezawodnościową ale przy tym największym zużyciem stali zbrojeniowej. Jest to również model wymagający od projektanta największego doświadczenia w kształtowaniu zbrojenia, bowiem nie uwzględnia wymaganego zbrojenia pionowego. Z kolei najmniejszą wartość wskaźnika niezawodności osiągnięto dla modelu kratownicy ST2, statycznie wyznaczalnego ale zarazem uwzględniającego potrzebę odrębnego ukształtowania zbrojenia pionowego.

Jak wykazały symulacje numeryczne, rodzaj modelu ST a zarazem sposób ukształtowania zbrojenia nie wpływał istotnie na nośność, obraz zarysowania czy odkształcenia. Uwzględniając zatem niezawodność układu i ciężar wyznaczonego zbrojenia można stwierdzić, że najkorzystniejszym modelem jest model ST3 o najmniejszym zużyciu stali zbrojeniowej i równocześnie korzystnym wskaźniku niezawodności.

Przeprowadzona analiza niezawodności tarcz o zbrojeniu ukształtowanym za pomocą trzech modeli kratownicowych o zróżnicowanej topologii, pokazuje że weryfikacja modeli ST powinna być zagadnieniem wielokryterialnym, tak aby otrzymane modele charakteryzowała dostateczna sztywność przy założonej objętości lub masie oraz równocześnie maksymalna możliwa do uzyskania niezawodność.

Literatura

- [1] Wranik J.: Obliczanie konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli prętowych, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole 1993.
- [2] Schlaich J., Schafer K.: Toward a Consistent Design of Structures. Journal of the Prestressed Concrete Institute, May-June 1987, pp. 74-150.
- [3] Starosolski W.: Konstrukcje żelbetowe według Eurokodu 2 i norm związanych, T.3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [4] PN-EN 1992. Projektowanie konstrukcji z betonu Część 1-1. Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN, Warszawa 2008.
- [5] Zalewski W.: Projektowanie żelbetowych konstrukcji przestrzennych. Części I,II, III. BISTYP, Warszawa, 1955.
- [6] Bołbotowski K., Knauff M., Sokół T.: Zastosowanie optymalizacji topologicznej w projektowaniu konstrukcji żelbetowych z wykorzystaniem modeli "Strut and Tie". Budownictwo i Architektura. 2013.
- [7] Woliński Sz.: Wspomagana badaniami analiza konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli ST. Budownictwo i Inżynieria Środowiska, z. 57(2/10).
- [8] Nowak A.S., Collins K.R.: Reliability of Structures. McGraw-Hill Higher Education, 2000.
- [9] Woliński Sz., Wróbel K.: Niezawodność konstrukcji budowlanych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2001.
- [10] Murzewski J.: Niezawodność konstrukcji inżynierskich. Arkady, Warszawa 1989.
- [11] PN-EN 1990:2002: Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji. PKN, Warszawa 2004.
- [12] CAST, <http://dankuchma.com/stm/CAST>, data dostępu: 30.11.2014.

RELIABILITY ANALYSIS OF CONCRETE SHIELD DESIGNED USING THE STRUT AND TIE METHOD

S u m m a r y

In this article the results of the performed analyses as well as of the numerical simulations of concrete shields, designed using strut and tie method and taking into account the reliability structure proposed by three different ST models, are presented and discussed in detail. The reliability of the truss systems were calculated tested when using the three different reinforcement. corresponding to schemes such the models. The analysis showed that with regard to the reliability being a primary objective in structural design, the use of a strut and tie method in the analysis of nonlinear stress distributious provides a safe solution.

Keywords: strut – and - tie models, concrete, reliability, shield, numerical simulation

Przesłano do redakcji: 1.12.2017 r.

Przyjęto do druku: 29.12.2017 r.