

Leszek OPYRCHAŁ<sup>1</sup>

## FUNKCJA NIEZAWODNOŚCI I CZAS BEZAWARYJNEJ PRACY ODPOWIADAJĄCY LINIOWEJ INTENSYWNOŚCI USZKODZEŃ

Funkcja niezawodności odgrywa podstawową rolę w nauce o niezawodności, gdyż pozwala na obliczenie prawdopodobieństwa uszkodzenia w określonym czasie  $t$ . Aby obliczyć funkcję niezawodności, należy wyznaczyć całkę z funkcji intensywności uszkodzeń. W dotychczasowej praktyce obliczeń niezawodności stosowano funkcję intensywności uszkodzeń, która jest stała w czasie. Jednocześnie wielu autorów wskazuje, że intensywność uszkodzeń nie jest stała w czasie. Najprostszym przypadkiem jest liniowa zależność funkcji intensywności uszkodzeń od czasu. W związku z tym w niniejszej pracy został przedstawiony sposób obliczeń funkcji niezawodności oraz średniego czasu bezawaryjnej pracy, w przypadku gdy intensywność uszkodzeń  $\lambda$  zmienia się liniowo w czasie, czyli  $\lambda = at + b$ . Podano wzory na średni czas bezawaryjnej pracy, gdy współczynnik  $a > 0$  oraz  $a < 0$ . Przedstawiono przykładowe obliczenia dla oceny niezawodności sieci wodociągowej. Obliczenia całek przeprowadzono za pomocą narzędzi udostępnionych na stronie internetowej WWW Wolfram-Mathematica. Pokazano, że otrzymane za pomocą zaproponowanej metody wartości średniego czasu bezawaryjnej pracy znacznie się różnią od dotychczasowego sposobu opartego na założeniu czasowej niezmienności intensywności uszkodzeń. Różnice wynoszą od 20 do 43%.

**Słowa kluczowe:** funkcja niezawodności, czas bezawaryjnej pracy, intensywność uszkodzeń

### 1. Wprowadzenie

W ogólności funkcja niezawodności wyraża się wzorem [1]:

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t -\lambda(\tau) d\tau\right) \quad (1)$$

gdzie:  $R(t)$  – funkcja niezawodności,  
 $\lambda(t)$  – intensywność uszkodzeń,

---

<sup>1</sup> Leszek Opyrchał, Akademia Górniczo-Hutnicza, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: opyrchał@agh.edu.pl, tel. 12 6174497

$t$  – czas,  
 $\tau$  – zmienna całkowania.

Średni czas bezawaryjnej pracy  $T_S$  jest definiowany jako:

$$T_S = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2)$$

Przyjmując założenie, że intensywność uszkodzeń  $\lambda$  nie zależy od czasu, otrzymuje się znane wzory:

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad T_S = \frac{1}{\lambda}.$$

Jednakże wielu autorów (np. [2]) wskazuje, że intensywność uszkodzeń jest funkcją czasu. Powstaje wówczas problem, jaką postać przyjmuje funkcja niezawodności oraz jaką funkcją wyraża się średni czas bezawaryjnej pracy. Odpowiedź na to pytanie zostanie udzielona dla najprostszego przypadku, czyli gdy intensywność uszkodzeń jest liniową funkcją czasu. Wyniki całkowań otrzymano za pomocą narzędzi udostępnionych na stronie WolframAlfa [3].

## 2. Funkcja niezawodności i bezawaryjny czas pracy

### Obliczenie funkcji niezawodności

Gdy intensywność uszkodzeń jest liniowo zależna od czasu, wtedy:

$$\lambda(t) = at + b \quad (3)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi. Intensywność uszkodzeń maleje lub rośnie w czasie w zależności od znaku stałej  $a$ . Podstawiając zależność (3) do wzoru (1) i wykonując całkowanie, otrzymuje się wzór na funkcję niezawodności:

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t -(a\tau + b) d\tau\right) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2}a\tau^2 - b\tau\right)\Big|_0^t\right] = \exp\left[-t\left(\frac{1}{2}at + b\right)\right] \quad (4)$$

### Obliczenie średniego czasu bezawaryjnej pracy

Średni czas bezawaryjnej pracy otrzymuje się, podstawiając zależność (4) do wzoru (2). W tym przypadku wynik jest nieco bardziej skomplikowany i wymaga rozważenia dwu przypadków.

#### Przypadek $a > 0$

Jeżeli  $a > 0$ , wtedy:

$$T_S = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}at^2 - bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \operatorname{erf}\left(\frac{at+b}{\sqrt{2a}}\right) \Big|_0^{\infty} \quad (5)$$

Aby jednak równość (5) była określona, musi być spełniony warunek  $a > 0$ .

Funkcja  $\operatorname{erf}(x)$ , zwana funkcją błędu, występująca we wzorze (5) wyraża się następującym wzorem [4]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

Posiada ona następujące właściwości:

$$\operatorname{erf}(0) = 0,$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Funkcja  $\operatorname{erf}$  jest funkcją nieparzystą, czyli:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x).$$

Dla  $|x| \ll 1$  można zastosować rozwinięcie Maclaurina [4]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 \dots \right).$$

Dla  $x \ll 1$  wartość funkcji  $\operatorname{erf}(x)$  może być obliczona także ze wzoru:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left( x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 \dots \right).$$

Dla  $x \gg 1$  wartość funkcji  $\operatorname{erf}(x)$  jest obliczana na podstawie rozwinięcia:

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left( x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-3} + \frac{3}{4}x^{-5} - \frac{15}{8}x^{-7} \dots \right).$$

Wartości funkcji  $\operatorname{erf}$  są podawane także w tablicach statystycznych.

W celu dokończenia obliczenia średniego czasu bezawaryjnej pracy należy obliczyć wartość funkcji (5) w granicach całkowania 0 i  $\infty$ . Ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at+b}{\sqrt{2a}} = \infty$$

oraz  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ , w górnej granicy całkowania  $t = \infty$  otrzymuje się  $\sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{\frac{b^2}{2a}}$ .

Dla dolnej granicy całkowania  $t = 0$ , po podstawieniu tej wartości do wzoru (5),

otrzymuje się wartość dolnej granicy całkowania  $\sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)$ .

Wynik uzyskuje się, odejmując wartość dolnej granicy całkowania od górnej:

$$T_S = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)\right) \quad (6)$$

Ponieważ  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ , więc wielkość  $T_S$  jest zawsze nieujemna.

#### Przypadek $a < 0$

W analizowanym przypadku należy wykonać podstawienie:

$$a' = -a.$$

Wówczas równanie (4) przyjmie postać:

$$R(t) = \exp\left(\frac{1}{2} a' t^2 - bt\right) = \exp\left[t\left(\frac{1}{2} a' t - b\right)\right] \quad (7)$$

Średni bezawaryjny czas pracy będzie się wyrażać wzorem:

$$T_S = \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2} a' t^2 - bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \operatorname{erfi}\left(\frac{a' t - b}{\sqrt{2a}}\right) \Big|_0^{\infty} \quad (8)$$

Funkcja  $\operatorname{erfi}(z)$ , urojona funkcja błędu jest zdefiniowana jako:

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{\operatorname{erf}(iz)}{i},$$

gdzie  $z$  – liczba zespolona,  $i$  – jednostka urojona,  $i$  posiada następujące właściwości:

$$\operatorname{erfi}(0) = 0,$$

$$\operatorname{erfi}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$\operatorname{erfi}(\infty) = \infty.$$

Funkcja  $erfi$  jest funkcją nieparzystą:

$$erfi(-x) = -erfi(x).$$

W rozwinięciu Maclauriena dla  $x \approx 0$  funkcja  $erfi(x)$  przyjmuje postać:

$$erfi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}x^5 + \frac{1}{21\sqrt{\pi}}x^7 \dots$$

Dla dużych wartości  $x$  funkcja  $erfi(x)$  może być przybliżona szeregiem:

$$erfi(x) = e^{x^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}x} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^3} + \frac{3}{4\sqrt{\pi}x^5} \dots \right)$$

Ponieważ w nieskończoności funkcja  $erfi$  przyjmuje wartość nieskończoną, całka (8) jest rozbieżna. Wynika to z faktu, że funkcja intensywności uszkodzeń jest funkcją malejącą, co teoretycznie może doprowadzić do sytuacji, w której od pewnego czasu granicznego  $T_L$  intensywność uszkodzeń  $\lambda(t)$  będzie przyjmować wartości ujemne. Ponieważ jest to przypadek nieinżynierski, należy zmodyfikować funkcję niezawodności w następujący sposób: Jeżeli funkcja intensywności uszkodzeń jest liniowo zależna od czasu, czyli:

$$\lambda(t) = at + b$$

i jest spełniony warunek  $a < 0$ , to przez czas graniczny należy roznieść czas, dla którego funkcja intensywności uszkodzeń przyjmuje wartość zerową:

$$\lambda(t = T_L) = aT_L + b = 0 \quad (9)$$

czyli

$$T_L = -\frac{b}{a}.$$

Funkcja niezawodności  $R(t)$  będzie definiowana następująco:

$$R(t) = \exp\left(\frac{1}{2}at^2 - bt\right) = \exp\left[t\left(\frac{1}{2}at - b\right)\right] \quad \text{dla } t \in (0, T_L),$$

w pozostałych zaś przypadkach  $R(t) = 0$ . Dla tej definicji funkcji niezawodności wzór (8) na średni czas bezawaryjnej pracy przyjmij postać:

$$\begin{aligned}
 T_S &= \int_0^{T_L} e^{\frac{1}{2}a't^2 - bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2a'}} e^{\frac{b^2}{2a'}} \operatorname{erfi}\left(\frac{a't - b}{\sqrt{2a'}}\right) \Big|_0^{T_L} = \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2a'}} e^{\frac{b^2}{2a'}} \left[ \operatorname{erfi}\left(\frac{a'T_L - b}{\sqrt{2a'}}\right) - \operatorname{erfi}\left(\frac{-b}{\sqrt{2a'}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie  $a' = -a$ .

Uwzględniając równość (9), można stwierdzić, że mianownik w pierwszej funkcji  $\operatorname{erfi}$  jest równy zero, a ponieważ  $\operatorname{erfi}(0) = 0$  oraz wykorzystując nieparzystość tej funkcji, otrzymuje się:

$$T_S = \sqrt{\frac{\pi}{2a'}} e^{\frac{b^2}{2a'}} \operatorname{erfi}\left(\frac{b}{\sqrt{2a'}}\right) \tag{11}$$

### 3. Praktyczne obliczenia

#### Tablice funkcji $\operatorname{erf}(x)$ i $\operatorname{erfi}(x)$

W celu wykonania praktycznych obliczeń niezbędna jest znajomość wartości funkcji  $\operatorname{erf}(x)$  oraz  $\operatorname{erfi}(x)$ . Zamiast stosować rozwinięcia prościej jest skorzystać z tablic bądź kalkulatorów funkcji dostępnych na stronie internetowej WolframAlfa (tab. 1. i 2.).

Tabela 1. Wartości funkcji  $\operatorname{erf}(x)$  wyliczone za pomocą WolframAlfa

Table 1. The values of the function  $\operatorname{erf}(x)$  calculated using WolframAlfa

$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$x$	$\operatorname{erf}(x)$
0	0	0,5	0,5204999	1	0,8427008	2	0,9953223	3	0,9999779
0,05	0,0563720	0,55	0,5633234	1,1	0,8802051	2,1	0,9970205	3,1	0,9999884
0,1	0,1124629	0,6	0,6038561	1,2	0,9103140	2,2	0,9981372	3,2	0,9999940
0,15	0,1679960	0,65	0,6420293	1,3	0,9340079	2,3	0,9988568	3,3	0,9999969
0,2	0,2227026	0,7	0,6778012	1,4	0,9522851	2,4	0,9993115	3,4	0,9999985
0,25	0,2763264	0,75	0,7111556	1,5	0,9661051	2,5	0,9995930	3,5	0,9999993
0,3	0,3286268	0,8	0,7421010	1,6	0,9763484	2,6	0,9997640	–	–
0,35	0,3793821	0,85	0,7706681	1,7	0,9837905	2,7	0,9998657	–	–
0,4	0,4283924	0,9	0,7969082	1,8	0,9890905	2,8	0,9999250	–	–
0,45	0,4754817	0,95	0,8208908	1,9	0,9927904	2,9	0,9999589	–	–

Tabela 2. Wartości funkcji  $erfi(x)$  wyliczone za pomocą WolframAlfaTable 2. The values of the function  $erfi(x)$  calculated using WolframAlfa

$x$	$erfi(x)$	$x$	$erfi(x)$	$x$	$erfi(x)$	$x$	$erfi(x)$	$x$	$erfi(x)$
0	0	0,5	0,6149521	1	1,6504257	2	18,564802	5	$8,2982739 \cdot 10^6$
0,05	0,0564460	0,55	0,6892998	1,1	1,9911672	2,1	26,167703	5,5	$1,432099 \cdot 10^{12}$
0,1	0,1132152	0,6	0,7678531	1,2	2,4159130	2,2	37,747109	6	$4,112751 \cdot 10^{14}$
0,15	0,1705349	0,65	0,8512658	1,3	2,9560866	2,3	55,739693	6,5	$1,962253 \cdot 10^{17}$
0,2	0,2287213	0,7	0,9402829	1,4	3,6569575	2,4	84,263074	7	$1,553486 \cdot 10^{20}$
0,25	0,2880836	0,75	1,0357573	1,5	4,5847332	2,5	130,39576	8	$4,432450 \cdot 10^{26}$
0,3	0,3489493	0,8	1,1386709	1,6	5,8377254	3	1629,9946	9	$9,500777 \cdot 10^{33}$
0,35	0,4116694	0,85	1,2501594	1,7	7,5641752	3,5	$3,5282288 \cdot 10^4$	10	$1,524307 \cdot 10^6$
0,4	0,4666246	0,9	1,3715432	1,8	9,9911198	4	$1,2969597 \cdot 10^6$	20	$1,47479 \cdot 10^{172}$
0,45	0,5442317	0,95	1,5043632	1,9	13,471816	4,5	$8,0197459 \cdot 10^7$	30	$1,37904 \cdot 10^{389}$

### Przykład obliczeniowy

Kwietniewski, badając intensywność uszkodzeń sieci wodociągowej, otrzymał następujące zależności [2]:

- dla przewodów azbestowo-cementowych AC

$$\lambda_{AC} = 0,3915t + 0,9168 \left[ \frac{\text{uszk.}}{\text{km} \times \text{rok}} \right],$$

- dla przewodów stalowych

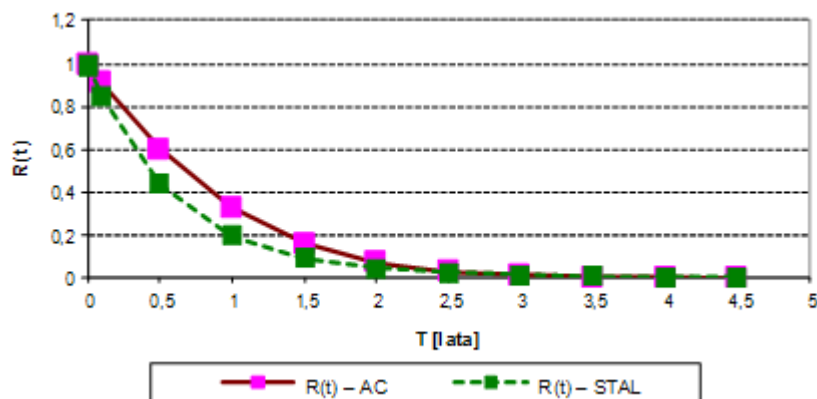
$$\lambda = -0,1328t + 1,6883 \left[ \frac{\text{uszk.}}{\text{km} \times \text{rok}} \right].$$

Zgodnie ze wzorem (4) odpowiednie funkcje niezawodności wynoszą:

$$R_{AC}(t) = \exp[-0,1958t^2 - 0,9168t],$$

$$R_{STAL}(t) = \exp[0,0664t^2 - 1,6883t].$$

Kształt funkcji niezawodności pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Wykres funkcji niezawodności  $R(t)$  dla rurociągów stalowych (STAL) i azbestowo-cementowych (AC)

Fig. 1. The plot of the reliability function  $R(t)$  for steel (STEEL) and asbestos-cement (AC) pipelines

W celu obliczenia średniego bezawaryjnego czasu pracy dla przewodów AC stosuje się wzór (6), ponieważ stała  $a = 0,3915 > 0$ .

$$T_{S(AC)} = \sqrt{\frac{3,14159}{2 \cdot 0,3915}} e^{\frac{0,9168^2}{2 \cdot 0,3915}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{0,9168}{\sqrt{2 \cdot 0,3915}}\right)\right) \quad [\text{km} \times \text{rok}],$$

gdzie wartość funkcji  $\operatorname{erf}(1,036080) = 0,85632$  była interpolowana na podstawie danych zawartych w tab. 1.

W celu obliczenia czasu bezawaryjnej pracy dla rurociągu stalowego należy zastosować wzór (11), gdyż współczynnik  $a$  w liniowej funkcji intensywności uszkodzeń jest mniejszy od zera.

$$T_S = \sqrt{\frac{3,14159}{2 \cdot 0,1328}} e^{\frac{1,6883^2}{2 \cdot 0,1328}} \operatorname{erfi}\left(\frac{1,6883}{\sqrt{2 \cdot 0,1328}}\right) = 0,625 \quad [\text{km} \times \text{rok}].$$

Wartość funkcji  $\operatorname{erfi}(3,27594) = 8324,21$  obliczono kalkulatorem funkcji znajdującym się na stronie WolframAlfa.

#### 4. Dyskusja

Obliczona na podstawie danych podanych przez Kwieniewskiego [2] średnia uszkodzalność przewodów w latach 207-2011 wynosiła odpowiednio:

$$\bar{\lambda}_{AC} = 2,0912 \left[ \frac{\text{uszk.}}{\text{km} \times \text{rok}} \right], \quad \bar{\lambda}_{STAL} = 1,2898 \left[ \frac{\text{uszk.}}{\text{km} \times \text{rok}} \right].$$

Przyjmując model stałości uszkodzalności w czasie, czyli  $\lambda(t) = \text{const}$ , można obliczyć średni czas bezawaryjnej pracy, który dla odpowiednich przewodów wynosi:

$$\bar{T}_{S(AC)} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{AC}} = \frac{1}{2,0912} = 0,478 \quad [\text{km} \times \text{rok}],$$

$$\bar{T}_{S(STAL)} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{STAL}} = \frac{1}{1,2898} = 0,775 \quad [\text{km} \times \text{rok}].$$

Porównując otrzymane wyniki z rezultatami z poprzedniego punktu  $T_{S(AC)} = 0,842 \text{ km} \cdot \text{rok}$  oraz  $T_{S(STAL)} = 0,625 \text{ km} \cdot \text{rok}$ , otrzymuje się względne różnice rezultatów:

$$\Delta T_{S(AC)} = \frac{|0,842 - 0,478|}{0,842} = 0,432 = 43,2\%,$$

$$\Delta T_{S(STAL)} = \frac{|0,625 - 0,775|}{0,625} = 0,240 = 24,0\%.$$

Można zauważyć znaczną rozbieżność wyników, ponieważ czas bezawaryjnej pracy jest obliczany na podstawie całki (2) od zera do nieskończoności, czyli obejmuje cały okres istnienia badanego wytworu techniki. Czas bezawaryjnej pracy jest zatem prognozą. Natomiast intensywność uszkodzeń jest otrzymywana na podstawie rzeczywistych, zaobserwowanych awarii. Jeżeli na tej podstawie, tj. intensywności uszkodzeń, oblicza się prognozę bezawaryjnego czasu pracy, to poprawność modelu wyjściowego, czyli funkcji intensywności uszkodzeń, odgrywa decydującą rolę w wiarygodności otrzymanych wyników.

## 5. Wnioski

Uwzględnienie liniowego modelu funkcji intensywności uszkodzeń znacznie poprawia wyniki obliczeń średniego bezawaryjnego czasu pracy. Dlatego należy kontynuować proponowane obliczenia zwłaszcza dla wykładniczych w czasie funkcji intensywności uszkodzeń.

## Literatura

- [1] Jaźwiński J., Waryńska-Fiok K.: Bezpieczeństwo systemów. PWN, Warszawa 1993.

- [2] Rak J.R. (red.), Kwietniewski M., Kowalski D., Tchórzewska-Cieślak B., Zimoch I., Bajer J., Iwanejko R., Miszta-Kruk K., Studziński A., Boryczko K., Pietrucha-Urbanik K., Piegoń I.: Metody oceny niezawodności i bezpieczeństwa dostawy wody do odbiorców. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2013.
- [3] WolframAlfa, [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) (7.12.2013 r.).
- [4] Dwight H.: Tables of integrals and other mathematical data. The MacMillan Company, New York 1961.

## THE RELIABILITY FUNCTION AND ERROR FREE RUNNING TIME RESPECTIVE TO THE LINEAR FAILURE RATE

### Summary

The reliability function plays in the science of the reliability of the fundamental role since it allows the calculation of the probability of damage at a given time  $t$ . To calculate the reliability function should calculate the integral of the function of the failure rate function. In current practice, the calculation of reliability the failure rate function is used which is constant over time. At the same time, many authors indicates that the failure rate is not constant over time. The simplest case is a linear correlation function of the intensity of damage over time. Therefore, in this article is the reliability function calculation method, and the mean error free running time in the case where  $\lambda$  failure intensity varies linearly in time, that is,  $\lambda = at + b$ . Formulas are given for the mean time between failures when the original coefficient if  $a > 0$ , and if  $a < 0$ . There are examples estimated to assess the reliability of the water supply system. The calculation of the integrals were performed using the tools available on the web site Wolfram-Mathematica. It is shown that calculated using the proposed method the mean time to failure-free operation are significantly different from the previous method based on the assumption of time invariance intensity of damage. The difference amounts from 20% to 43%.

**Keywords:** reliability function, error free running time, failure rate

*Przesłano do redakcji: 11.12.2013 r.*

*Przyjęto do druku: 02.06.2014 r.*

DOI:10.7862/rb.2014.12