

Zbigniew SIENKIEWICZ¹

PIONOWE DRGANIA WŁASNE OSIOWOSYMETRYCZNEJ SZTYWNEJ BRYŁY ZAGŁĘBIONEJ W INERCYJNEJ PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

Przedstawiono analizę pionowych drgań własnych masywnej osiowosymetrycznej sztywnej bryły zagłębionej w jednorodnej inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Zespoloną sztywność półprzestrzeni z więzami nałożonymi przez sztywną bryłę otrzymano z rozwiązania mieszanego osiowosymetrycznego zagadnienia brzegowego dynamicznej teorii sprężystości metodą elementów brzegowych w dziedzinie częstości. Część rzeczywista zespolonej sztywności pionowej reprezentuje sztywność i inercję podłoża, część urojona przedstawia tłumienie związane z rozchodzeniem się fal w półnieskończonym ośrodku sprężystym (tłumienie radiacyjne). Współczynniki sztywności i tłumienia półprzestrzeni są funkcjami częstości drgań. Częstość drgań własnych sztywnej bryły z więzami nałożonymi przez inercyjną półprzestrzeń sprężystą jest pierwiastkiem nieliniowego równania charakterystycznego. Analizę drgań własnych przeprowadzono stosując parametry bezwymiarowe: współczynnik zagłębienia bryły w podłożu, współczynnik masy, współczynnik częstości oraz współczynnik tłumienia radiacyjnego. Przedstawiono zależność współczynnika częstości drgań własnych i współczynnika tłumienia od współczynnika masy i współczynnika zagłębienia. Wyznaczono również współczynniki częstości drgań własnych bryły przy pominięciu tłumienia radiacyjnego oraz w przypadku bryły zagłębionej w półprzestrzeni nieinercyjnej, której pionowa sztywność statyczna jest granicą dynamicznego współczynnika sztywności półprzestrzeni przy częstości dążącej do zera. Różnice między współczynnikami częstości reprezentują wpływ tłumienia radiacyjnego oraz inercji półprzestrzeni.

Słowa kluczowe: częstości drgań własnych, interakcja dynamiczna, metoda elementów brzegowych, nieliniowe równanie charakterystyczne

¹ Autor do korespondencji / corresponding author: Zbigniew Sienkiewicz, Politechnika Koszalińska, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji, Katedra Mechaniki Budowli, ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin; tel. 94-3478-567; zbigniew.sienkiewicz@wilsig.tu.koszalin.pl

1. Wprowadzenie

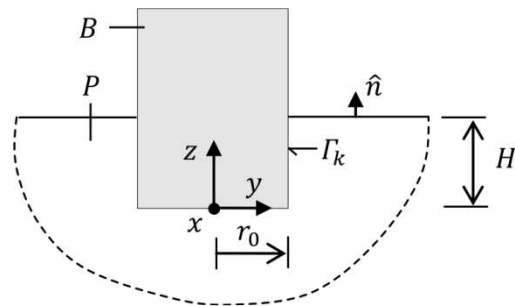
Klasycznym modelem fundamentu blokowego pod maszyną jest sztywna bryła na nieinercyjnym podłożu sprężystym [1],[2]. Bardziej zaawansowanym modelem jest sztywna bryła zagłębiona w inercyjnej półprzestrzeni sprężystej [3], [4], [5]. W analizie dynamicznej ważnym problemem jest zagadnienie własne [1]. Pionowe i złożone drgania własne masywnego fundamentu o podstawie prostokątnej zagłębionego w półprzestrzeni lepkosprężystej z lokalnym modelowaniem wpływu zasypki analizowano w pracy [6]. Przypadek masywnego bloku o podstawie kwadratowej na powierzchni uwarstwionej półprzestrzeni sprężystej przedstawiono w pracy [7].

W prezentowanej pracy analizuje się pionowe drgania własne masywnej osiowosymetrycznej sztywnej bryły zagłębionej w inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. W układzie bryła-półprzestrzeń uwzględniono interakcję dynamiczną rozwiązując mieszane osiowosymetryczne zagadnienie brzegowe teorii sprężystości w dziedzinie częstości.

2. Sformułowanie problemu

2.1. Układ sztywna bryła-półprzestrzeń sprężysta

Rozpatruje się osiowosymetryczną sztywną bryłę $B \subset R^3$ o masie m i promieniu r_0 , połączoną więzami dwustronnymi z inercyjną półprzestrzenią sprężystą $P \subset R^3$ na powierzchni kontaktu $\Gamma_k = \Gamma_k^B \cap \Gamma_k^P$, gdzie $\Gamma_k^B \subset \partial B$ oznacza część powierzchni bryły w kontakcie z półprzestrzenią a $\Gamma_k^P \subset \partial P$ – część powierzchni półprzestrzeni w kontakcie z bryłą (rys. 1.).



Rys. 1. Sztywna bryła B zagłębiona w półprzestrzeń sprężystej P

Fig. 1. Rigid body B embedded in an elastic half-space

Właściwości półprzestrzeni sprężystej określają: gęstość ρ , współczynnik Poissona ν i moduł ścinania G .

2.2. Interakcja kinematyczna w układzie bryła-półprzestrzeń

Niech funkcja $w^*(t; \omega) = w_0^* e^{i\omega t}$ opisuje zmienne w czasie t przemieszczenia nieważkiej osiowosymetrycznej sztywnej bryły $B^* = B|_{m=0}$ w kierunku pionowej osi z (rys. 1.), gdzie w_0^* – amplituda drgań, ω – częstość w rad/s , $i = \sqrt{-1}$. Harmoniczne pionowe oscylacje sztywnego stempla stanowią osiowosymetryczne wymuszenie kinematyczne na powierzchni kontaktu Γ_k^P półprzestrzeni z bryłą. W półprzestrzeni sprężystej P powstanie osiowosymetryczne pole przemieszczenia $\vec{u}(\underline{x}, t; \omega)$, $\underline{x} \in P \subset R^3$, które w układzie walcowym (r, φ, z) ma składowe niezależne od kąta φ : $\vec{u}(\underline{x}, t; \omega) = (u_r(\underline{x}; \omega), 0, u_z(\underline{x}; \omega)) e^{i\omega t}$.

Pole przemieszczenia $u_r(\underline{x}; \omega)$, $u_z(\underline{x}; \omega)$, $\underline{x} \in P$ musi spełniać następujące warunki:

- równania ruchu Naviera w dziedzinie częstości [8],
- przemieszczeniowy warunek brzegowy na powierzchni kontaktu $\Gamma_k^P \subset \partial P$,

$$u_r(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_k^P$$

$$u_z(\underline{x}; \omega) = w_0^*, \underline{x} \in \Gamma_k^P$$

- naprężeniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni półprzestrzeni $\Gamma_0^P \subset \partial P \setminus \Gamma_k^P$,

$$t_r^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_0^P$$

$$t_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_0^P$$

gdzie \hat{n} oznacza wektor jednostkowy normalny do powierzchni Γ_0^P i skierowany na zewnątrz P ,

- warunek wypromieniowania w ośrodku półnieskończonym [9].

Sformułowanie całkowe powyższego mieszanego osiowosymetrycznego zagadnienia brzegowego dynamicznej teorii sprężystości określone jest tylko na tworzącej L powierzchni ∂P [10]:

$$\frac{1}{2} \{u_{os}(\underline{x}; \omega)\} = \int_L \left([A(\underline{x}, \underline{y}; \omega)] \{t_{os}^{(\hat{n})}(\underline{y}; \omega)\} - [B(\underline{x}, \underline{y}; \omega)] \{u_{os}(\underline{y}; \omega)\} \right) r(\underline{y}) dl(r(\underline{y}), z(\underline{y})) \quad (1)$$

gdzie:

$$\{u_{os}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}, \{t_{os}^{(\hat{n})}\} = \begin{Bmatrix} t_r^{(\hat{n})} \\ t_z^{(\hat{n})} \end{Bmatrix},$$

$$[A] = 2 \int_0^\pi \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} \cos \varphi + \tilde{U}_{12} \sin \varphi & \tilde{U}_{13} \\ \tilde{U}_{31} \cos \varphi + \tilde{U}_{32} \sin \varphi & \tilde{U}_{33} \end{bmatrix} d\varphi(\underline{y}),$$

$$[B] = 2 \int_0^\pi \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} \cos \varphi + \tilde{T}_{12} \sin \varphi & \tilde{T}_{13} \\ \tilde{T}_{31} \cos \varphi + \tilde{T}_{32} \sin \varphi & \tilde{T}_{33} \end{bmatrix} d\varphi(\underline{y}),$$

$\tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{ij}(\underline{x}, \underline{y}; \omega)$ – zespolone przemieszczenie punktu \underline{y} w kierunku j w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołane stacjonarną siłą skupioną $1e^{i\omega t}$, działającą w punkcie \underline{x} w kierunku i (kartezjański układ współrzędnych),

$\tilde{T}_{ij} = \tilde{T}_{ij}(\underline{x}, \underline{y}; \omega)$ – zespolona składowa wektora naprężenia w punkcie \underline{y} w kierunku j w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołana stacjonarną siłą skupioną $1e^{i\omega t}$, działającą w punkcie \underline{x} w kierunku i (kartezjański układ współrzędnych).

Brzegowe równanie całkowe (1) można rozwiązać numerycznie dzieląc brzeg L na N segmentów liniowych z jednym węzłem w środku każdego elementu [11]. Z rozwiązania otrzymuje się m.in. przybliżony rozkład zespolonego pola naprężenia $\tilde{t}_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega)$ na powierzchni kontaktu $\Gamma_k^P \subset \partial P$. Wypadkowa tego pola wynosi:

$$\tilde{R}_z^P(t; \omega) = \int_{\Gamma_k^P} \tilde{t}_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} dS(\underline{x}) = \tilde{K}_z(\omega) w^*(t; \omega)$$

gdzie: $\tilde{K}_z(\omega)$ – pionowa zespolona sztywność dynamiczna półprzestrzeni z więzami nałożonymi przez sztywny nieważki stempel kołowy.

Stacjonarną reakcję półprzestrzeni $\tilde{R}_z^P(t; \omega)$ można zapisać w postaci

$$\tilde{R}_z^P(t; \omega) = (\text{Re} \tilde{K}_z + i \text{Im} \tilde{K}_z) w^*(t; \omega) = K_V(\omega) w^*(t; \omega) + C_V(\omega) \dot{w}^*(t; \omega) \quad (2)$$

gdzie: $K_V = \text{Re} \tilde{K}_z$ – współczynnik sztywności półprzestrzeni,

$C_V = (\frac{1}{\omega}) \text{Im} \tilde{K}_z$ – współczynnik tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni,

$\dot{w}^* \equiv \frac{d}{dt} w^*$.

2.3. Pionowe drgania własne sztywnej bryły z więzami nałożonymi przez półprzestrzeń sprężystą

Rozwiązanie zagadnienia interakcji kinematycznej w układzie nieważka sztywna bryła-półprzestrzeń sprężysta umożliwia analizę pionowych drgań wła-

snych osiowosymetrycznej sztywnej bryły o masie m , zagłębionej w inercjalnej półprzestrzeni sprężystej. Równanie ruchu pionowego bryły ma postać:

$$m\ddot{w}(t; \omega) = -R_z^P(t; \omega) \quad (3)$$

gdzie reakcja półprzestrzeni $R_z^P(t; \omega)$ dana jest zależnością wynikającą z rozwiązania zagadnienia interakcji kinematycznej (2) :

$$R_z^P(t; \omega) = K_V(\omega)w(t; \omega) + C_V(\omega)\dot{w}(t; \omega) \quad (4)$$

Uwzględnienie zależności (4) w równaniu ruchu (3) prowadzi do jednorodnego równania różniczkowego:

$$m\ddot{w}(t; \omega) + C_V(\omega)\dot{w}(t; \omega) + K_V(\omega)w(t; \omega) = 0,$$

którego rozwiązanie postuluje się w postaci ruchu oscylacyjnego z częstością ω i parametrem tłumienia h :

$$w(t; \omega) = w_0 e^{-ht} e^{i\omega t} = w_0 e^{i(\omega+ih)t}$$

Warunek istnienia rozwiązania oscylacyjnego $\omega \neq 0$ ma postać

$$\frac{K_V(\omega)}{m} - \left(\frac{C_V(\omega)}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \quad (5)$$

Miejsce zerowe nieliniowego równania (5) $\omega^* \equiv \omega^d$ jest częstością pionowych drgań własnych sztywnej bryły z tłumieniem radiacyjnym (falowym) inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Po wyznaczeniu częstości ω^d , parametr tłumienia h oblicza się ze wzoru

$$h(\omega^d) = \frac{C_V(\omega^d)}{2m}$$

Pomijając tłumienie radiacyjne półprzestrzeni w równaniu (5), tj. zakładając $C_V(\omega) \equiv 0$, otrzymuje się inne miejsce zerowe $\omega^* \equiv \omega^n$, które jest częstością pionowych drgań własnych bryły bez tłumienia falowego. Zakładając, że podłoże jest nieinercyjne otrzymuje się częstość drgań własnych bryły ω^{st} ze wzoru

$$\omega^{st} = \sqrt{\frac{K_V^{st}}{m}}$$

gdzie $K_V^{st} = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_V(\omega)$ jest pionową statyczną sztywnością półprzestrzeni sprężystej z więzami nałożonymi przez sztywny nieważki stempel kołowy. Różnice między ω^d i ω^n reprezentują wpływ tłumienia radiacyjnego inercyjnej półprzestrzeni na częstości drgań własnych sztywnej bryły natomiast różnice między nietłumionymi częstościami ω^n i ω^{st} przedstawiają wpływ inercji półnieskończonego podłoża sprężystego.

3. Analiza parametryczna

Analizę parametryczną pionowych drgań własnych osiowosymetrycznej masywnej sztywnej bryły zagłębionej w podłożu sprężystym przeprowadzono stosując następujący zbiór parametrów bezwymiarowych:

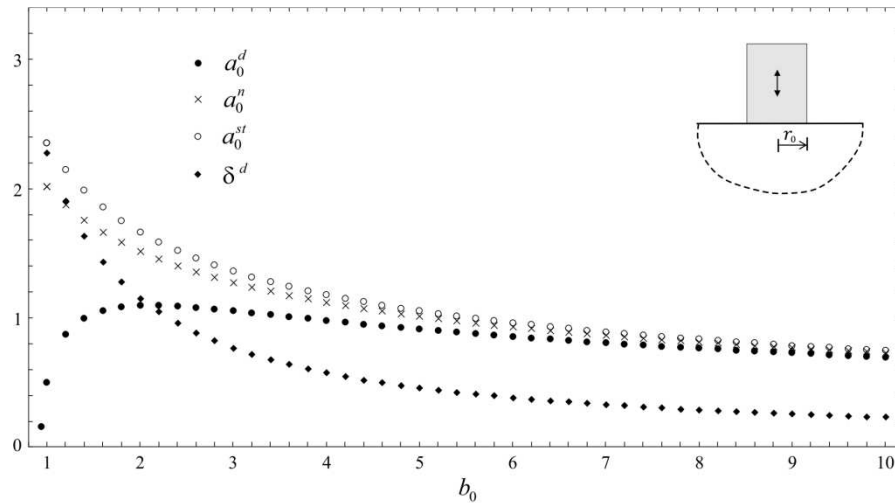
- współczynnik zagłębienia bryły w podłożu: H/r_0 ,
- współczynnik masy: $b_0 = m/(\rho r_0^3)$,
- współczynniki częstości: $a_0 = \omega r_0/\sqrt{G/\rho}$; $a_0^d = a_0(\omega^d)$; $a_0^n = a_0(\omega^n)$; $a_0^{st} = a_0(\omega^{st})$,
- współczynnik tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni: $\delta^d = hr_0/\sqrt{G/\rho}$,
- współczynnik Poissona półprzestrzeni $\nu = 0.25$.

Zagadnienie interakcji kinematycznej w układzie bryła–półprzestrzeń rozwiązywano metodą elementów brzegowych [11], ustalając ostateczną dyskretyzację na podstawie testów numerycznych: na tworzącej L_k^P powierzchni kontaktu Γ_k^P zastosowano elementy o długości $l_e = \lambda_s/6$, gdzie $\lambda_s = (1/\omega)2\pi\sqrt{G/\rho}$ oznacza długość fali poprzecznej w półprzestrzeni, natomiast na tworzącej L_0^P powierzchni swobodnej Γ_0^P zastosowano elementy o długości $l_e = \lambda_s/4$, przy czym efektywna część brzegu L_0^P podlegająca dyskretyzacji zależy od wielkości zagłębienia bryły w półprzestrzeni. Miejsca zerowe nieliniowego równania charakterystycznego wyznaczano numerycznie [7]. Wartości współczynników częstości drgań własnych a_0^d, a_0^n, a_0^{st} oraz współczynnika tłumienia δ^d obliczono stosując dyskretne wartości współczynnika zagłębienia bryły w podłożu $H/r_0 \in \{0, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0\}$ oraz dyskretne wartości współczynnika masy b_0 ogólnie od 1 do 10 co $\Delta b_0 = 0.2$, zmniejszając przyrosty Δb_0 w strefie dużej wrażliwości a_0^d . Wyniki analizy parametrycznej przedstawiono na rys. 2-6.

4. Wnioski

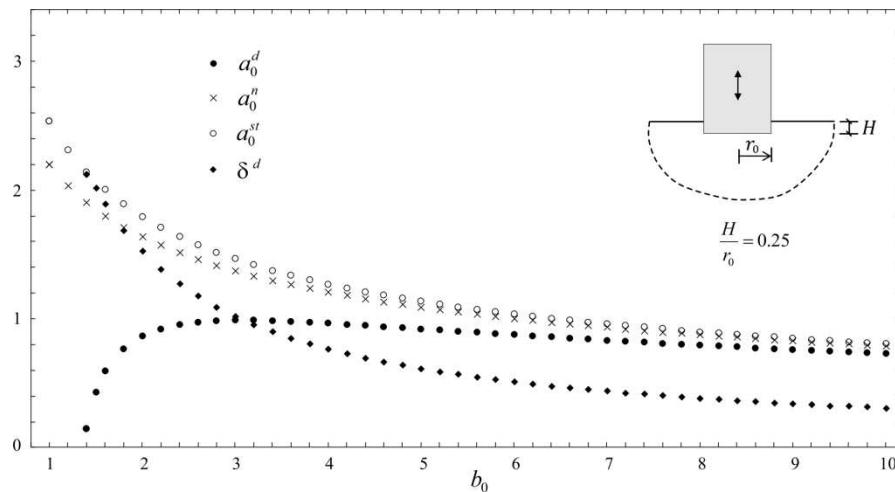
Współczynnik częstości pionowych drgań własnych bryły zagłębionej w jednorodnej inercyjnej półprzestrzeni sprężystej jest kontrolowany przez współczynnik masy oraz współczynniki sztywności i tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni. Strefy wrażliwości współczynnika częstości drgań własnych na zmianę współczynnika masy są zróżnicowane, z największą wrażliwością w strefie granicznej wartości współczynnika masy, rozdzielającej ruch oscylacyjny od nieoscylacyjnego. Ponadto graniczna wartość współczynnika masy rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zagłębienia. Istotny wpływ tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni i wielkości zagłębienia bryły w podłożu na jej pionowe drgania własne jest widoczny na tle wyznaczonych częstości drgań własnych bez tłumienia radiacyjnego podłoża inercyjnego. Zbiór częstości drgań własnych bryły na podłożu nieinercyjnym o sztywności statycznej jest dobrym układem

odniesienia do odpowiedzi na pytanie, kiedy uwzględnienie dynamicznej interakcji w analizowanym zagadnieniu jest konieczne.



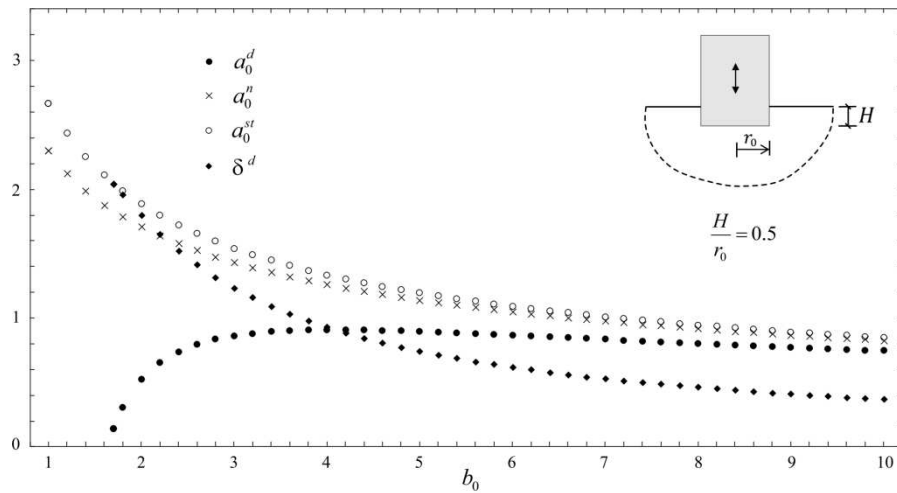
Rys. 2. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych a_0^d , a_0^n , a_0^{st} i współczynnika tłumienia δ^d od współczynnika masy b_0 : sztywna bryła na powierzchni półprzestrzeni

Fig. 2. Variation of dimensionless eigenfrequencies a_0^d , a_0^n , a_0^{st} and damping ratio δ^d with the mass ratio b_0 : rigid body on half-space



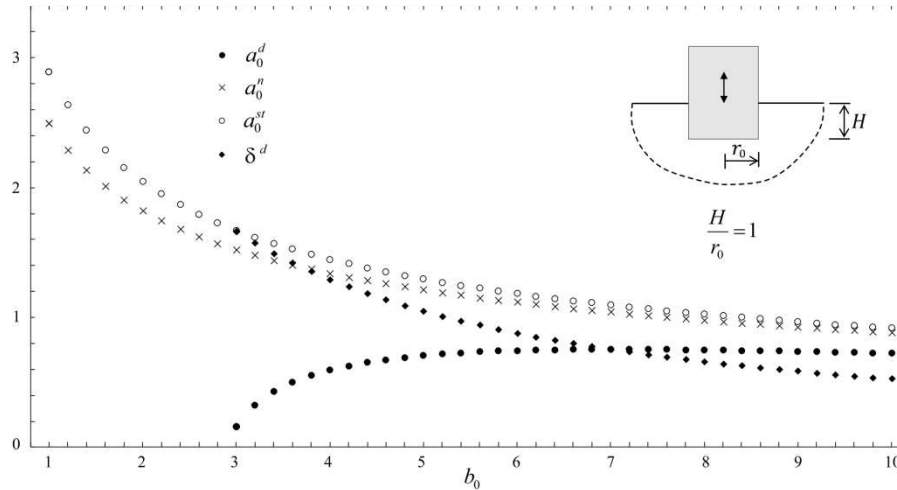
Rys. 3. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych a_0^d , a_0^n , a_0^{st} i współczynnika tłumienia δ^d od współczynnika masy b_0 : zagłębienie bryły $H/r_0 = 0.25$

Fig. 3. Variation of dimensionless eigenfrequencies a_0^d , a_0^n , a_0^{st} and damping ratio δ^d with the mass ratio b_0 : the embedment ratio $H/r_0 = 0.25$



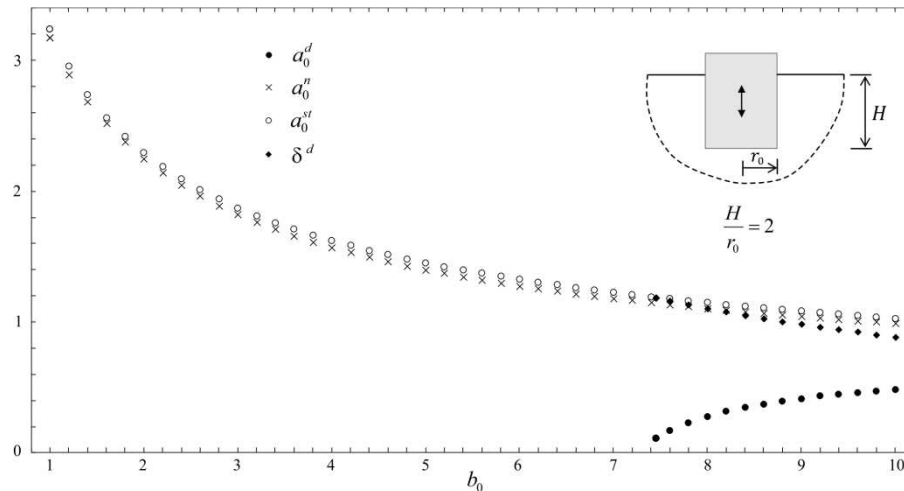
Rys. 4. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych a_0^d, a_0^n, a_0^{st} i współczynnika tłumienia δ^d od współczynnika masy b_0 : zagłębienie bryły $H/r_0 = 0.5$

Fig. 4. Variation of dimensionless eigenfrequencies a_0^d, a_0^n, a_0^{st} and damping ratio δ^d with the mass ratio b_0 : the embedment ratio $H/r_0 = 0.5$



Rys. 5. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych a_0^d, a_0^n, a_0^{st} i współczynnika tłumienia δ^d od współczynnika masy b_0 : zagłębienie bryły $H/r_0 = 1$

Fig. 5. Variation of dimensionless eigenfrequencies a_0^d, a_0^n, a_0^{st} and damping ratio δ^d with the mass ratio b_0 : the embedment ratio $H/r_0 = 1$



Rys. 6. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych a_0^d, a_0^n, a_0^{st} i współczynnika tłumienia δ^d od współczynnika masy b_0 : zagłębienie bryły $H/r_0 = 2$

Fig. 6. Variation of dimensionless eigenfrequencies a_0^d, a_0^n, a_0^{st} and damping ratio δ^d with the mass ratio b_0 : the embedment ratio: $H/r_0 = 2$

Literatura

- [1] Langer J.: Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [2] Lipiński J.: Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa 1985.
- [3] Richart F.E., Woods R.D., Hall J.R.: Vibrations of soils and foundations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1970.
- [4] Gazetas G.: Analysis of machine foundation vibrations: state of the art, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 2, 1983, pp. 2-42.
- [5] Sienkiewicz Z.: Local modelling of backfill effects for rigid axisymmetric foundations under dynamic excitation, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 47, no. 4, 2009, pp. 923-942.
- [6] Sienkiewicz Z.: Free vibrations of rigid massive rectangular foundations embedded in a viscoelastic half-space, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 33, no. 1, 1995, pp. 115-138.
- [7] Sienkiewicz Z.: Eigenproperties of massive rigid body on elastic half-space, Journal of Geotechnical Engineering, vol. 122, no. 6, 1996, pp. 488-491.
- [8] Achenbach J.D.: Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [9] Eringen A.C., Suhubi E.S.: Elastodynamics, Academic Press, New York 1975
- [10] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
- [11] Dominguez J.: Boundary elements in dynamics, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London 1993.

VERTICAL EIGENVIBRATION OF AXISYMMETRIC RIGID BODY EMBEDDED IN AN INERTIAL ELASTIC HALF-SPACE

Summary

An analysis of vertical eigenvibration of a massive axisymmetric rigid body embedded in a uniform elastic half-space is presented. The complex-value stiffness of the half-space with the constraints imposed by the rigid body has been obtained from the solution of a mixed axisymmetric boundary value problem of the dynamic elasticity by the boundary element method in the frequency domain. The real part of the complex-valued stiffness represents the stiffness and inertia of the medium while the imaginary part describes the damping due to energy dissipated by waves propagating away from the foundation (radiation damping). Stiffness and damping coefficients of the half-space are frequency dependent.

Eigenfrequency of the rigid body with the constraints imposed by the inertial elastic half-space is the root of nonlinear characteristic equation. The analysis of the eigenvibration has been realized using the dimensionless parameters: embedment ratio, mass ratio, frequency ratio and radiation damping ratio. Variation of dimensionless eigenfrequency and damping ratio with the mass and embedment ratios are presented. Dimensionless eigenfrequencies at neglected radiation damping and in the case of a massless elastic medium are also computed. The differences between the damped and undamped eigenfrequencies represent the effects of radiation damping and inertia of the half-space.

Keywords: eigenfrequencies, dynamic interaction, boundary element method, nonlinear characteristic equation

Przesłano do redakcji: 17.02.2017 r

Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.