

Witold BASIŃSKI<sup>1</sup>

## WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH ORTOGONALNYCH RAM PORTALOWYCH O WĘZŁACH PODATNYCH

W pracy przedstawiono metodę diagnostycznego szacowania rzeczywistej sztywności obrotowej węzłów podatnych w portalowych ramach stalowych na podstawie analizy pierwszej częstości drgań swobodnych. Analizę przeprowadzono dla ram z ryglem podatnie zamocowanym w słupach oraz ram ze słupami podatnie zamocowanymi słupami w fundamentach. Sporządzono wykresy zależności współczynnika  $\lambda^2(k)$  częstości drgań własnych ram w funkcji unormowanego parametru  $k$  sztywności obrotowej węzłów przy stałym stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$ . Wyznaczono pasmo częstości drgań ram portalowych z ryglem podatnie zamocowanym w słupach przy zmiennym stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$ . Wzięto pod uwagę ciągłą zmianę sztywności obrotowej węzłów podatnych począwszy od węzła przegubowego aż do sztywnego zamocowania. Zamieszczono tablicę parametrów dynamicznych  $\lambda^2(k)$  w funkcji unormowanych parametrów sztywności węzłów  $k_1/k_2$ .

**Słowa kluczowe:** sztywność obrotowa, drgania swobodne, pasmo częstości drgań

### 1. Wprowadzenie

Ramy portalowe są podstawowymi układami nośnymi hal przemysłowych oraz obiektów użyteczności publicznej. Wykonuje się je zazwyczaj w konstrukcji stalowej łącząc słupy z fundamentami oraz rygle ze słupami poprzez połączenia śrubowe. Obecnie stosowane metody obliczeniowe konstrukcji [6, 10, 17] umożliwiają traktowanie węzłów w ramach portalowych jako podatnych. Wprowadzana do obliczeń sztywność węzłów jest wartością teoretyczną mogącą różnić się od wielkości występującej w konstrukcji rzeczywistej.

Na odchylenie od wartości pomierzonej na konstrukcji rzeczywistej ram sztywności obrotowej węzłów wpływ mają losowe imperfekcje geometryczne rygli, słupów oraz połączeń. Odchylnie od obliczeniowej sztywności zamocowania rygli i słupów wpływa na przemieszczenia poziome ram, a w konsekwencji na długości wybojeniowe słupów, czyli na obliczeniową nośność elementów ram.

---

<sup>1</sup> Witold Basiński, Politechnika Śląska, Katedra Konstrukcji Budowlanych, ul. Akademicka 2A, 44-100 Gliwice; tel. 322371127; witold.basinski@polsl.pl

Powoduje to zmianę rozkładu sił wewnętrznych i bezpieczeństwa całego ustroju konstrukcyjnego [12].

Badaniem, rozwiązaniami teoretycznymi oraz analizą MES dotyczącymi analizy dynamicznej ram z węzłami podatnymi zajmowało się wielu autorów [1, 7, 8, 9, 13, 16]. Analizowano wpływ przekroju prętów ram, tłumienia oraz sztywności obrotowej węzłów na postacie drgań własnych. W pracach [2, 3, 4, 5, 11] wykazano, iż wszelkie anomalie jakości konstrukcji mają swoje odbicie w parametrach drgań swobodnych np.: zwiększone tłumienie sygnalizuje możliwość występowania poślizgowego tarcia w połączeniach, odkształceń plastycznych zwłaszcza w połączeniach doczołowych. Ponadto mniejsze od oczekiwanych częstości drgań własnych ramy sygnalizują między innymi: możliwość występowania rygli, słupów lub węzłów o mniejszym przekroju, uszkodzeń mechanicznych elementów ram lub węzłów.

Przedmiotem pracy jest ocena rzeczywistej sztywności obrotowej węzłów podatnych występujących w portalowych ramach stalowych na podstawie analizy pierwszej częstości drgań swobodnych.

Przeprowadzono analizę teoretyczną częstości drgań własnych w funkcji sztywności obrotowej węzłów podatnych rygla ze słupami oraz słupów z fundamentami w portalowych ramach stalowych. Analizę wykonano dla czterech rodzajów ram. Wzięto pod uwagę ramy z rygłem podatnie zamocowanym w słupach oraz ramy ze słupami podatnie zamocowanymi w fundamentach.

Oszacowano wpływ sztywności obrotowej węzłów rygli i słupów na pierwszą częstość drgań własnych ram przy ciągłym rozkładzie masy. W przypadku masy ciągłej wykorzystano znaną macierz sztywności dynamicznej elementu belkowego i stosując metodę przemieszczeń otrzymano macierze sztywności ram z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów rygli i słupów.

Na podstawie przeprowadzonej analizy sporządzono wykresy zależności współczynnika  $\lambda^2(k)$  oczekiwanych częstości drgań własnych  $\omega$  ram w funkcji unormowanego parametru  $k$  sztywności zamocowania rygli i słupów przy stałym stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$ . Wyznaczono pasmo częstości drgań ram portalowych przy zmiennym stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$ . Wzięto pod uwagę ciągłą zmianę sztywności obrotowej węzłów podatnych począwszy od węzła przegubowego aż do sztywnego zamocowania.

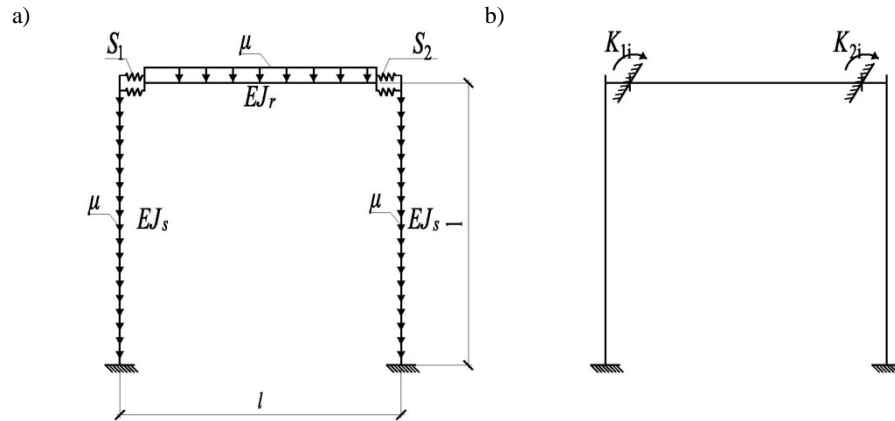
## **2. Oszacowanie wpływu sztywności rygla na częstość drgań własnych ram**

### **2.1. Rama portalowa z rygłem podatnie zamocowanym w słupach oraz sztywnym zamocowaniu słupów w fundamentach**

W pierwszym etapie analizowano wpływ sztywności zamocowania rygla w słupach na częstość drgań ram portalowych.

Na rysunku 1a przedstawiono schemat statyczny ramy portalowej o węzłach podatnych łączących rygiel ze słupami oraz sztywno zamocowanych słupach. Na rysunku 1 b zilustrowano schemat metody przemieszczeń.

W przedstawionej ramie portalowej wyznaczono wpływ sztywności obrotowej węzłów podatnych rygiela ze słupami  $S_{1,2}$  na częstość drgań własnych  $\omega$  przy ciągłym rozkładzie masy  $\mu$ .



Rys. 1. Rama portalowa z rygiel podatnie zamocowanym w słupach oraz sztywnym zamocowaniu słupów w fundamentach - ciągły rozkład masy  $\mu$  (a); schemat metody przemieszczeń (b)

Fig. 1. Portal frame with a girder semi-rigid mounted on columns and the rigid attaching columns – continuous mass distribution  $\mu$  (a); a schematic of the displacement method (b)

Do oszacowania częstości drgań własnych  $\omega$  ramy portalowej w przypadku ciągłego rozkładu masy wykorzystano znaną macierz (1) sztywności dynamicznej pręta stosowaną do obliczania ram [14, 15]. Pominięto wpływ odkształcalności osiowej prętów. Spowodowało to redukcję wektora przemieszczeń do postaci pięcioelementowej, a wraz z nim redukcję macierzy sztywności dynamicznej do rozmiaru 5x5 (z 6x6). Pominięcie odkształcalności osiowej prętów powoduje minimalne zwiększenie poszukiwanej pierwszej częstości drgań.

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{-EJ}{l^3} \lambda^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ}{l^3} F_5(\lambda) & \frac{-EJ}{l^3} F_6(\lambda) & \frac{EJ}{l^2} F_3(\lambda) & \frac{EJ}{l^2} F_4(\lambda) \\ 0 & \frac{-EJ}{l^3} F_6(\lambda) & \frac{EJ}{l^3} F_5(\lambda) & \frac{-EJ}{l^2} F_4(\lambda) & \frac{-EJ}{l^2} F_3(\lambda) \\ 0 & \frac{EJ}{l^2} F_3(\lambda) & \frac{-EJ}{l^2} F_4(\lambda) & \frac{EJ}{l} F_1(\lambda) & \frac{EJ}{l} F_2(\lambda) \\ 0 & \frac{EJ}{l^2} F_4(\lambda) & \frac{-EJ}{l^2} F_3(\lambda) & \frac{EJ}{l} F_2(\lambda) & \frac{EJ}{l} F_1(\lambda) \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie  $F_1(\lambda)$  do  $F_6(\lambda)$  są funkcjami zależnymi od stabelaryzowanych funkcji Kryłowa:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \lambda \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)}; & F_2(\lambda) &= \lambda \frac{\sinh(\lambda) - \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)}; \\ F_3(\lambda) &= \frac{\lambda^2 \sinh(\lambda) \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)}; & F_4(\lambda) &= \lambda^2 \frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)}; \\ F_5(\lambda) &= \lambda^3 \frac{\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)}; & F_6(\lambda) &= \lambda^3 \frac{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cos(\lambda)} \end{aligned} \quad (2)$$

Częstość drgań własnych pierwszego rzędu  $\omega$  wyznaczono z zależności (3)[15]:

$$\lambda^4 = \frac{\mu \omega^2 l^4}{EJ} \quad \text{---} > \quad \omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} \quad (3)$$

gdzie:  $\lambda$  – współczynnik częstości drgań własnych;

$\mu$  – ciągły rozkład masy [kg/m];

$l$  – długość elementu [m];

$EJ$  – sztywność giętna [kNm<sup>2</sup>].

W celu budowy globalnej macierzy sztywności dynamicznej ramy z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów  $S_{1,2}$  rygla i słupów zastosowano metodę przemieszczeń (rys. 1b). Na podstawie jednostkowych macierzy obrotów i przemieszczeń poszczególnych prętów ramy, przyporządkowując unormowane parametry sztywności  $k_i$  węzłom, zbudowano globalną macierz sztywności dynamicznej z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów rygla i słupów. W przypadku szczególnym, czyli przy równej sztywności rygli i słupów  $EJ_s/EJ_r=1$  przyjmuje ona postać (4):

$$K1(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{2EJF_1(\lambda)}{l} + k_1 a & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{-EJF_3(\lambda)}{l^2} \\ \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{2EJF_1(\lambda)}{l} + k_2 a & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} \\ \frac{-EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{2EJF_5(\lambda)}{l} - \frac{EJ\lambda^4}{l^3} \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

$$k_{1,2} = \frac{S_{1,2}}{S_R} = \frac{S_{1,2}}{aEJ/l} = \frac{S_{1,2}l}{aEJ} \quad \text{oraz} \quad a = 25 \quad (5)$$

są unormowanymi parametrami sztywności obrotowej węzła mieszczącymi się w przedziale 0 (przegub idealny)  $<k_{1,2}<1$  (węzeł sztywny). Graniczną sztywności węzła  $S_R$  przyjęto równą  $25EJ/l$  zgodnie z EC3 [17].

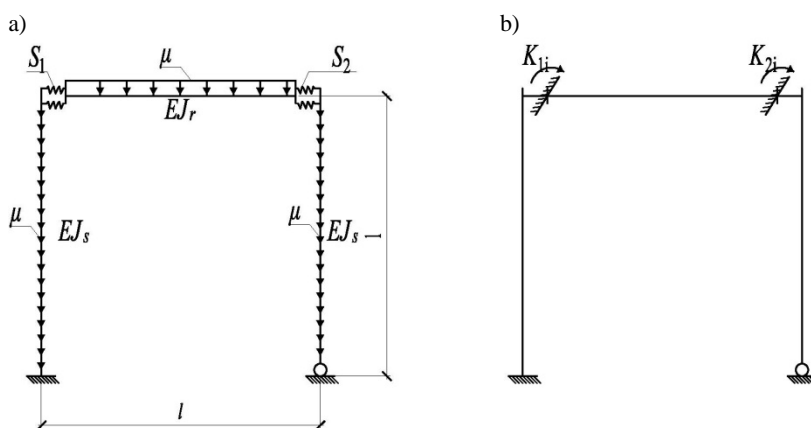
Przyrównując wyznacznik macierzy sztywności dynamicznej ramy (4) do zera otrzymano równanie (6):

$$\begin{aligned} &8F_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - k_2 a F_3^2(\lambda) - 4F_1(\lambda)F_3^2(\lambda) - 2F_2(\lambda)F_3^2(\lambda) - k_1 a F_3^2(\lambda) - \\ &2F_2^2(\lambda)F_5(\lambda) - 4\lambda^4 F_1^2(\lambda) + \lambda^4 F_2^2(\lambda) + 2k_1 k_2 a^2 F_5(\lambda) - \lambda^4 k_1 k_2 a^2 + \\ &4k_1 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) + 4k_2 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) - 2\lambda^4 k_1 a F_1(\lambda) - 2\lambda^4 k_2 a F_1(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Z równania (6) przy zadanych unormowanych parametrach sztywności obrotowej  $k_1$ ,  $k_2$  wyznaczono współczynnik częstości drgań własnych  $\lambda^2$  ramy parterowej o podatnie zamocowanym ryglu w słupach i sztywnym zamocowaniu słupów w fundamentach.

## 2.2. Rama portalowa z rygłem podatnie zamocowanym w słupach oraz sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów w fundamentach

Na rysunku 2a pokazano schemat ramy portalowej z rygłem podatnie zamocowanym w słupach oraz sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów w fundamentach przy ciągłym rozkładzie masy  $\mu$ .



Rys. 2. Rama portalowa z rygłem podatnie zamocowanym w słupach oraz o sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów – ciągły rozkład masy  $\mu$  (a); schemat metody przemieszczeń (b)

Fig. 2. Portal frame with a girder semi-rigid mounted on columns and the rigid and pinned attaching columns – continuous mass distribution  $\mu$  (a); a schematic of the displacement method (b)

Korzystając z metody przemieszczeń (rys. 2b) zbudowano globalną macierz sztywności dynamicznej ramy z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów rygla i słupów, która dla przypadku szczególnego przy  $EJ_s/EJ_r = 1$  przybiera postać (7):

$$K^2(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{2EJF_1(\lambda)}{l} + k_1a & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{-EJF_3(\lambda)}{l^2} & 0 \\ \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{2EJF_1(\lambda)}{l} + k_2a & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} \\ \frac{-EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{2EJF_5(\lambda)}{l} - \frac{EJ\lambda^4}{l^3} & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} \\ 0 & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_1(\lambda)}{l} \end{bmatrix} \quad (7)$$

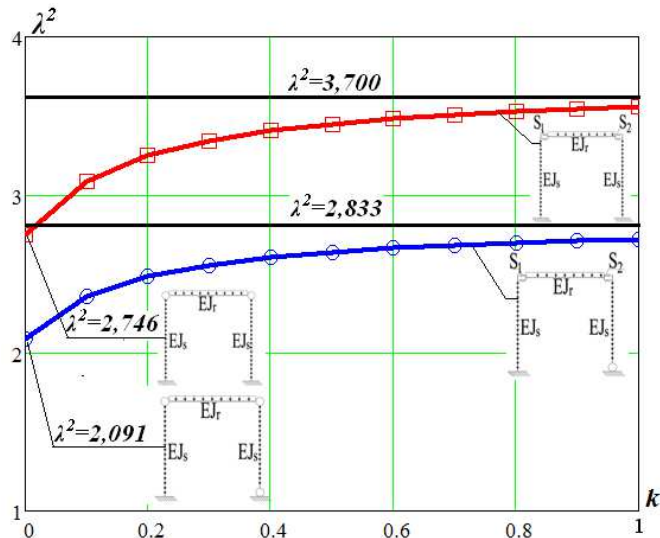
Z przyrównania wyznacznika macierzy sztywności dynamicznej ramy (7) do zera otrzymano równanie (8):

$$\begin{aligned} & F_2^2(\lambda)F_3^2(\lambda) - 4F_1^2(\lambda)F_4^2(\lambda) - 4F_1^2(\lambda)F_3^2(\lambda) + F_2^2(\lambda)F_4^2(\lambda) + 8F_1^3(\lambda)F_5(\lambda) - \\ & 4\lambda^4 F_1^3(\lambda) - k_1aF_1(\lambda)F_3^2(\lambda) - 2k_1aF_1(\lambda)F_4^2(\lambda) - k_2aF_1(\lambda)F_3^2(\lambda) + 4k_1aF_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - \\ & 2k_2aF_1(\lambda)F_4^2(\lambda) - 2k_1aF_2^2(\lambda)F_5(\lambda) + 4k_2aF_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - 2\lambda^4 k_1aF_1^2(\lambda) + \lambda^4 k_1aF_2^2(\lambda) - \\ & 2k_2aF_1^2(\lambda) - 2F_1(\lambda)F_2(\lambda)F_3^2(\lambda) - 6F_1(\lambda)F_2^2(\lambda)F_5(\lambda) + 2F_2^2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) + \\ & 3\lambda^4 F_1(\lambda)F_2^2(\lambda) - k_1k_2a^2 F_4^2(\lambda) + 2k_1k_2a^2 F_1(\lambda)F_5(\lambda) - \lambda^4 k_1k_2a^2 F_1(\lambda) + \\ & 2k_1k_2a^2 F_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) + 4F_1(\lambda)F_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Na podstawie równania (8) przy zadanych unormowanych parametrach sztywności obrotowej  $k_1$  i  $k_2$ , wyznaczono współczynnik częstości drgań własnych  $\lambda^2$  ramy o podatnym zamocowaniu rygła w słupach oraz sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów w fundamentach. Współczynniki  $\lambda^2$  w przypadku obydwu ram uwzględniają ciągłą zmianę sztywności począwszy od węzła przegubowego aż do sztywnego zamocowania rygła w słupach, zilustrowaną ciągłą zmianą częstości drgań.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy zależności  $\lambda^2(k)$  ram o podatnie zamocowanym rygłu w słupach zależne od unormowanego parametru sztywności  $k$  węzłów rygła i słupa zawartej w przedziale  $0 < k_1 = k_2 < 1$  dla przypadku szczególnego przy  $EJ_r/EJ_f = 1$ . Wykresy obrazują wpływ sztywności obrotowej węzłów rygli i słupów na pierwszą częstość drgań własnych ram.

W tabeli 1 zawarto parametry  $\lambda^2$  w funkcji unormowanego parametru sztywności obrotowej węzłów rygła i słupów  $k$  służące do interpolacyjnego wyznaczenia sztywności obrotowej węzłów w jednonawowych ramach portalowych.



Rys. 3. Współczynniki  $\lambda^2$  częstości drgań własnych ram portalowych o podatnie zamocowanym ryglu w słupach w funkcji unormowanego parametru sztywności obrotowej  $k$  węzła ryglu i słupów

Fig. 3. The coefficients of  $\lambda^2$  frequency vibration portal frames semi-rigid mounted on the girder in the columns as a function of normalized parameter rotational stiffness  $k$  joint girder and columns

Tabela 1. Współczynniki  $\lambda^2$  dla unormowanego parametru sztywności węzłów ryglu i słupów  $k_1$  i  $k_2$

Table 1. The coefficients  $\lambda^2$  for a normalized stiffness joint girder and column  $k_1$  and  $k_2$

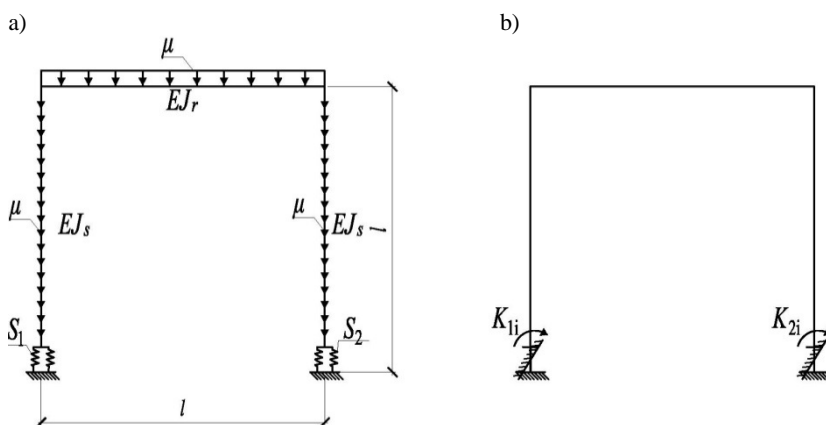
Rama o podatnie zamocowanym ryglu w słupach oraz sztywnym zamocowaniu słupów											
$k_1/k_2$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	2,746	2,935	3,040	3,106	3,152	3,185	3,211	3,231	3,248	3,261	3,272
0,1	2,935	3,087	3,173	3,228	3,266	3,295	3,316	3,333	3,347	3,358	3,368
0,2	3,040	3,173	3,249	3,298	3,332	3,357	3,377	3,392	3,405	3,415	3,424
0,3	3,106	3,228	3,298	3,343	3,375	3,399	3,417	3,431	3,442	3,452	3,460
0,4	3,152	3,266	3,332	3,375	3,405	3,427	3,444	3,458	3,469	3,478	3,486
0,5	3,185	3,295	3,357	3,399	3,427	3,449	3,465	3,478	3,489	3,497	3,505
0,6	3,211	3,316	3,377	3,417	3,444	3,465	3,481	3,494	3,504	3,512	3,520
0,7	3,231	3,333	3,392	3,431	3,458	3,478	3,494	3,506	3,516	3,524	3,531
0,8	3,248	3,347	3,405	3,442	3,469	3,489	3,504	3,516	3,526	3,534	3,541
0,9	3,261	3,358	3,415	3,452	3,478	3,497	3,512	3,524	3,534	3,542	3,549
1,0	3,272	3,368	3,424	3,460	3,486	3,505	3,520	3,531	3,541	3,549	3,555
Rama o podatnie zamocowanym ryglu w słupach oraz sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów											
$k_1/k_2$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	2,091	2,288	2,395	2,462	2,508	2,542	2,568	2,588	2,604	2,617	2,629
0,1	2,192	2,360	2,453	2,512	2,553	2,583	2,606	2,624	2,638	2,651	2,661
0,2	2,245	2,398	2,484	2,539	2,577	2,605	2,627	2,644	2,658	2,669	2,698
0,3	2,278	2,422	2,504	2,556	2,593	2,620	2,640	2,657	2,670	2,681	2,704
0,4	2,300	2,439	2,517	2,568	2,603	2,629	2,650	2,665	2,678	2,689	2,698
0,5	2,316	2,451	2,527	2,577	2,611	2,637	2,656	2,672	2,685	2,695	2,704
0,6	2,329	2,460	2,535	2,583	2,617	2,642	2,661	2,677	2,689	2,700	2,708
0,7	2,338	2,467	2,541	2,588	2,622	2,647	2,666	2,681	2,693	2,703	2,712
0,8	2,346	2,473	2,545	2,592	2,626	2,650	2,669	2,684	2,696	2,706	2,715
0,9	2,352	2,477	2,549	2,596	2,629	2,653	2,672	2,686	2,699	2,709	2,717
1,0	2,357	2,481	2,552	2,599	2,631	2,655	2,674	2,689	2,701	2,711	2,719

### 3. Oszacowanie wpływu sztywności zamocowania słupów na częstość drgań własnych ram

#### 3.1. Rama portalowa ze słupami podatnie zamocowanymi w fundamentach i sztywno zamocowanym ryglu

W kolejnym etapie przeanalizowano wpływ sztywności zamocowania słupów w fundamentach na zmianę częstości drgań własnych ram portalowych.

Na rysunku 4a zilustrowano schemat statyczny rama portalowej o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach i sztywnych węzłach łączących rygiel ze słupami. Na rysunku 4 b przedstawiono schemat metody przemieszczeń.



Rys. 4. Rama portalowa o podatnym zamocowaniu słupów oraz sztywno zamocowanym ryglu – ciągły rozkład masy  $\mu$  (a) oraz schemat metody przemieszczeń (b)

Fig. 4. Portal frame of semirigid fixing columns and rigid mounted girder – continuous mass distribution  $\mu$  (a) and a schematic of the displacement method (b)

Korzystając z metody przemieszczeń (rys. 4 b) zbudowano globalną macierz sztywności dynamicznej rama z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów słupów i fundamentów, która w przypadku szczególnym przy  $EJ_s/EJ_r=1$  przybiera postać (9):

$$K3(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{EJF_1(\lambda)}{l} + k_1 a & \frac{-EJF_4(\lambda)}{l^2} & 0 \\ \frac{-EJF_4(\lambda)}{l^2} & \frac{2EJF_5(\lambda)}{l^3} - \frac{EJ\lambda^4}{l^3} & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} \\ 0 & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_1(\lambda)}{l} + k_2 a \end{bmatrix} \quad (9)$$



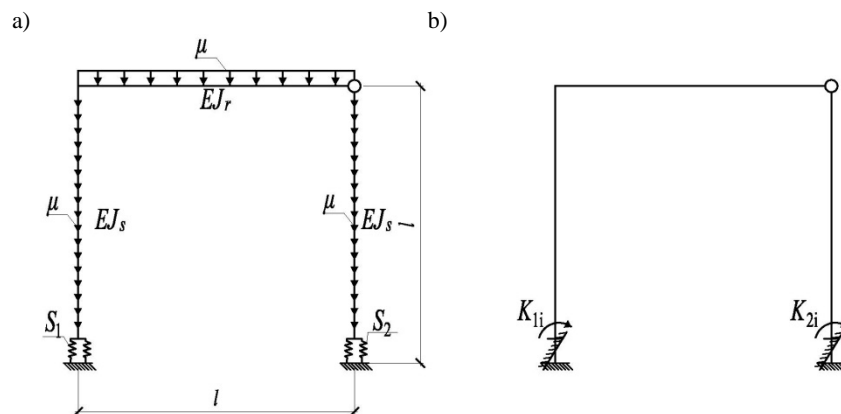
W wyniku przyrównania wyznacznika macierzy sztywności dynamicznej ramy (9) do zera otrzymano równanie (10):

$$\begin{aligned} & -k_2 a F_4^2(\lambda) - k_1 a F_4^2(\lambda) + 2F_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - 2F_1(\lambda)F_4(\lambda) - 2\lambda^4 F_1^2(\lambda) + 2k_1 k_2 a^2 F_5(\lambda) \\ & - \lambda^4 k_1 k_2 a^2 + 2k_1 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) + 2k_2 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) - \lambda^4 k_1 a F_1(\lambda) - \lambda^4 k_2 a F_1(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

z którego dla zadanych unormowanych parametrów sztywności obrotowej  $k_1$ ,  $k_2$ , wyznaczono współczynnik częstości drgań własnych  $\lambda^2$  ramy portalowej o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach i sztywnych węzłach ryglu i słupów.

### 3.2. Rama portalowa ze słupami podatnie zamocowanymi w fundamentach oraz sztywno i przegubowo zamocowanym ryglu

Na rysunku 5a przedstawiono schemat ramy portalowej o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach oraz sztywno i przegubowo zamocowanym ryglu w słupach ramy przy ciągłym rozkładzie masy  $\mu$ .



Rys. 5. Rama portalowa o podatnym zamocowaniu słupów oraz sztywno i przegubowo zamocowanym ryglu – ciągły rozkład masy  $\mu$  (a) oraz schemat metody przemieszczeń (b)

Fig. 5. Portal frame of semirigid fixing columns and rigid and pinned mounted girder – continuous mass distribution  $\mu$  (a) and a schematic of the displacement method (b)

Globalną macierz sztywności dynamicznej ramy z uwzględnieniem sztywności obrotowej węzłów łączących słupy z fundamentami zbudowano na podstawie macierzy sztywności dynamicznej pręta (1) wg metody przemieszczeń. Macierz dla przypadku szczególnego przy  $EJ_s/EJ_r=1$  obrazuje zależność (11):

$$K4(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{EJF_1(\lambda)}{l} + k_1a & 0 & \frac{-EJF_4(\lambda)}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{2EJF_1(\lambda)}{l} & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} \\ \frac{-EJF_4(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_3(\lambda)}{l^2} & \frac{2EJF_5(\lambda)}{l^3} - \frac{EJ\lambda^4}{l^3} & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} \\ 0 & \frac{EJF_2(\lambda)}{l} & \frac{EJF_4(\lambda)}{l^2} & \frac{EJF_1(\lambda)}{l} + k_2a \end{bmatrix} \quad (11)$$

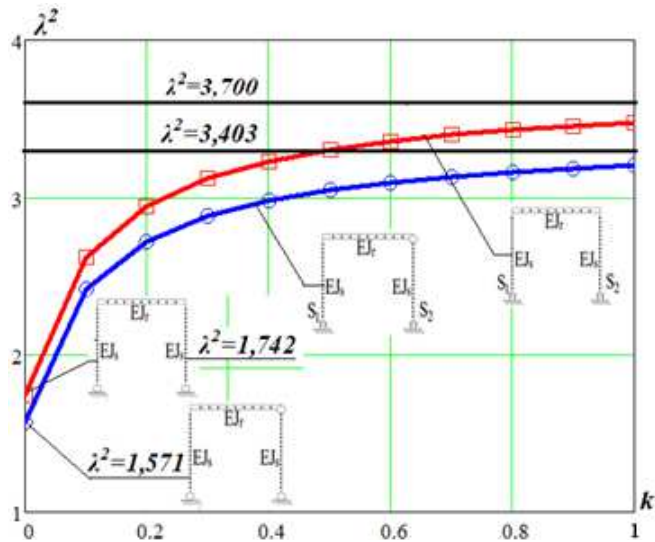
W wyniku przyrównania wyznacznika macierzy sztywności dynamicznej ramy (9) do zera otrzymano równanie (12):

$$\begin{aligned} & F_2^2(\lambda)F_4^2(\lambda) - 4F_1^2(\lambda)F_4^2(\lambda) - F_1^2(\lambda)F_3^2(\lambda) + 4F_1^3(\lambda)F_5(\lambda) - 2\lambda^4F_1^3(\lambda) - \\ & k_1aF_1(\lambda)F_3^2(\lambda) - 2k_1aF_1(\lambda)F_4^2(\lambda) + k_2aF_1(\lambda)F_3^2(\lambda) + 4k_1aF_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - \\ & 2k_2aF_1(\lambda)F_4^2(\lambda) - 2k_1aF_2^2(\lambda)F_5(\lambda) + 4k_2aF_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - 2\lambda^4k_1aF_1^2(\lambda) + \\ & \lambda^4k_1aF_2^2(\lambda) - 2\lambda^4k_2aF_1^2(\lambda) - 2F_1(\lambda)F_2^2(\lambda)F_5(\lambda) + \lambda^4F_1(\lambda)F_2^2(\lambda) - \\ & k_1k_2a^2F_3^2(\lambda) + 4k_1k_2a^2F_1(\lambda)F_5(\lambda) - 2\lambda^4k_1k_2a^2F_1(\lambda) + 2k_1aF_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) + \\ & 2F_1(\lambda)F_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Z równania (12) wyznaczono współczynnik częstości drgań własnych  $\lambda^2$  ramy o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach oraz sztywnym i przegubowym zamocowaniu rygła w słupach przy zadanych unormowanych parametrach sztywności zamocowania słupów  $k_1$  i  $k_2$ . W przypadku obu ram o podatnie zamocowanych słupach we współczynnikach  $\lambda^2$  uwzględniono ciągłą zmianę sztywności obrotowej począwszy od węzła przegubowego aż do sztywnego zamocowania słupów w fundamentach.

Na rys. 6 zilustrowano wykresy zależności  $\lambda^2(k)$  ram z podatnie zamocowanymi słupami przy sztywno zamocowanym rygłu oraz sztywno i podatnie zamocowanym rygłu w słupach zależne od unormowanego parametru sztywności  $k$  węzłów słupów i fundamentów. Parametry  $k_{1,2}$  zawarto w przedziale  $0 < k_1 = k_2 < 1$ . Wykresy obrazują wpływ sztywności obrotowej węzłów łączących słupy z fundamentami na pierwszą częstość drgań własnych ram.

W tabeli 2 zawarto parametry  $\lambda^2$  w funkcji unormowanego parametru sztywności obrotowej węzłów łączących słupy z fundamentami  $k$  służące do interpolacyjnego wyznaczania sztywności obrotowej węzłów w jednonawowych ramach portalowych o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach.



Rys. 6. Współczynniki  $\lambda^2$  częstości drgań własnych ram portalowych o podatnym zamocowaniu słupów w funkcji unormowanego parametru sztywności obrotowej  $k$  połączenia rygła ze słupami

Fig. 6. The coefficients of  $\lambda^2$  frequency vibration portal frames of pinned fixing columns as a function of normalized parameter rotational stiffness  $k$  mounting columns

Tabela 2. Współczynniki  $\lambda^2$  dla unormowanego parametru sztywności zamocowania słupa  $k_1$  i  $k_2$

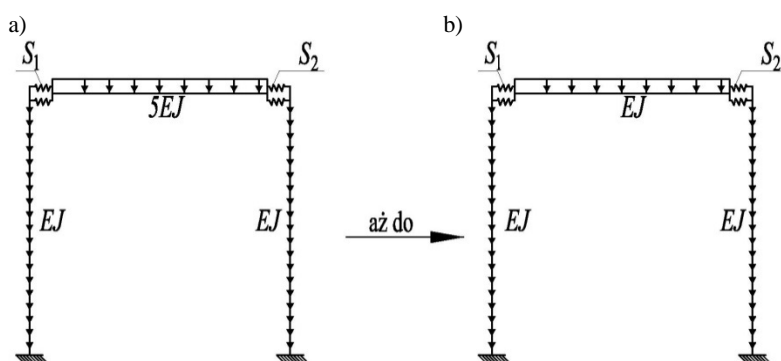
Table 2. The coefficients  $\lambda^2$  for a normalized stiffness fixing column  $k_1$  and  $k_2$

Rama o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach oraz sztywno zamocowanym ryglu											
$k_1/k_2$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,742	2,213	2,398	2,498	2,560	2,603	2,634	2,658	2,676	2,691	2,704
0,1	2,213	2,619	2,785	2,876	2,933	2,972	3,001	3,023	3,040	3,054	3,065
0,2	2,398	2,785	2,945	3,033	3,088	3,126	3,154	3,175	3,192	3,206	3,217
0,3	2,498	2,876	3,033	3,119	3,173	3,211	3,238	3,259	3,276	3,289	3,300
0,4	2,560	2,933	3,088	3,173	3,227	3,265	3,292	3,313	3,329	3,342	3,353
0,5	2,603	2,972	3,126	3,211	3,265	3,302	3,329	3,349	3,366	3,379	3,390
0,6	2,634	3,001	3,154	3,238	3,292	3,329	3,356	3,376	3,393	3,406	3,417
0,7	2,658	3,023	3,175	3,259	3,313	3,349	3,376	3,397	3,413	3,426	3,437
0,8	2,676	3,040	3,192	3,276	3,329	3,366	3,393	3,413	3,429	3,442	3,453
0,9	2,691	3,054	3,206	3,289	3,342	3,379	3,406	3,426	3,442	3,455	3,466
1,0	2,704	3,065	3,217	3,300	3,353	3,390	3,417	3,437	3,453	3,466	3,477
Rama o podatnym zamocowaniu słupów w fundamentach oraz sztywno i przegubowo zamocowanym ryglu											
$k_1/k_2$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,571	2,094	2,293	2,400	2,467	2,513	2,546	2,571	2,591	2,607	2,620
0,1	1,958	2,417	2,601	2,700	2,762	2,805	2,837	2,860	2,879	2,894	2,907
0,2	2,101	2,542	2,720	2,817	2,878	2,920	2,951	2,974	2,993	3,007	3,020
0,3	2,176	2,608	2,784	2,880	2,940	2,982	3,012	3,035	3,053	3,068	3,080
0,4	2,222	2,649	2,824	2,919	2,979	3,020	3,050	3,073	3,091	3,106	3,118
0,5	2,253	2,677	2,851	2,945	3,005	3,046	3,076	3,099	3,117	3,131	3,143
0,6	2,276	2,698	2,870	2,964	3,024	3,065	3,095	3,118	3,135	3,150	3,162
0,7	2,293	2,713	2,885	2,979	3,038	3,079	3,109	3,132	3,150	3,164	3,176
0,8	2,306	2,725	2,897	2,990	3,050	3,090	3,120	3,143	3,161	3,175	3,187
0,9	2,317	2,735	2,906	3,000	3,059	3,099	3,129	3,152	3,170	3,184	3,196
1,0	2,326	2,743	2,914	3,007	3,066	3,107	3,137	3,159	3,177	3,192	3,204

#### 4. Pasma częstości drgań własnych ram portalowych o podatnie zamocowanym ryglu

W przypadku ram parterowych zmiana sztywności obrotowej węzłów powoduje zmianę częstości drgań własnych ram oraz zmianę momentów zginających w słupach i ryglu. Efekt zmiennej częstości drgań oraz zmiany rozkładu momentów zginających występuje również przy stałej sztywności obrotowej połączeń oraz przy zmiennym stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$ .

Zjawisko zmiennej częstości drgań przy zmiennym stosunku sztywności słupa do rygla zobrazowano na przykładzie ram o podatnie zamocowanym ryglu. Wyznaczono pasmo częstości drgań jako zależność  $\lambda^2$  od  $EJ_s/EJ_r$  dla ramy portalowej o sztywnym zamocowaniu słupów w fundamentach oraz ramy o sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów. Przyjęto zmienny stosunek sztywności słupów do rygla począwszy od  $EJ_s/EJ_r=0,2$  aż do  $EJ_s/EJ_r=1$  (rys. 7).



Rys. 7. Zmienny stosunek słupów do rygla w ramie portalowej o podatnie zamocowanym ryglu

Fig. 7. Variable ratio columns to girder in the portal frame of the semirigid mounted girder

Oznacza to konieczność wprowadzenia do macierzy sztywności dynamicznej (1) rygli ram zmiennych (13):

$$EJ_r = nEJ_s \quad i \quad \lambda_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} \lambda \quad (13)$$

gdzie:  $n = 1, 2, 3, 4$  oraz  $5$ .

Po uwzględnieniu powyższych warunków zbudowano globalne macierze sztywności dynamicznej ram. Na podstawie wyznaczników przyrównanych do zera otrzymano ogólne równania (14) oraz (15) zmiany częstości drgań własnych ram przy zadanych unormowanych parametrach sztywności obrotowej  $k_1$  i  $k_2$  za-

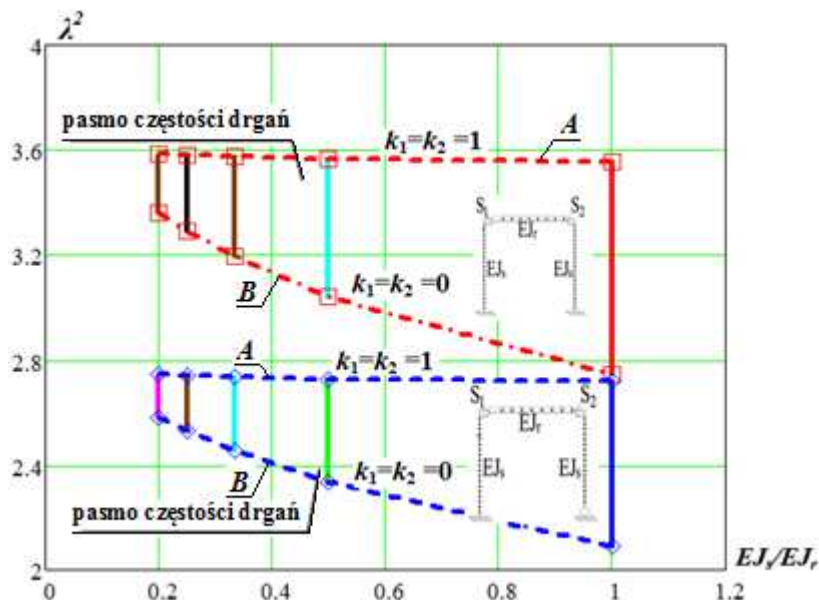
wierające pasmo częstości drgań przy zmiennym stosunku sztywności słupa do rygła  $EJ_s/EJ_r$ . Równanie (14) odnosi się do ramy portalowej o sztywnym zamocowaniu słupów w fundamentach, a (15) do ramy o sztywnym i przegubowym zamocowaniu słupów przy podatnie zamocowanym w obu przypadkach ryglu:

$$\begin{aligned}
& 2n^2 F_5(\lambda)F_1^2(\lambda_n) - 2nF_3^2(\lambda)F_2(\lambda_n) - 2nF_3^2(\lambda)F_1(\lambda_n) - 2n^2 F_5(\lambda)F_2^2(\lambda_n) - \\
& n^2 \lambda^4 F_1^2(\lambda_n) + n^2 \lambda^4 F_2^2(\lambda_n)^2 - k_1 a F_3^2(\lambda) - k_2 a F_3^2(\lambda) - 2F_1(\lambda)F_3^2(\lambda) + \\
& 2F_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - \lambda^4 F_1^2(\lambda) + 2nk_1 a F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2nk_2 a F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) - n\lambda^4 k_1 a F_1(\lambda_n) - \\
& n\lambda^4 k_2 a F_1(\lambda_n) + 4nF_1(\lambda)F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2k_1 k_2 a^2 F_5(\lambda) - 2n\lambda^4 F_1(\lambda)F_1(\lambda_n) - \\
& \lambda^4 k_1 k_2 a^2 + 2k_1 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) + 2k_2 a F_1(\lambda)F_5(\lambda) - \lambda^4 k_1 a F_1(\lambda) - \lambda^4 k_2 a F_1(\lambda) = 0
\end{aligned} \quad (14)$$

oraz:

$$\begin{aligned}
& F_2^2(\lambda)F_3^2(\lambda) - F_1^2(\lambda)F_4^2(\lambda) - 2F_1^2(\lambda)F_3^2(\lambda) - n^2 F_4^2(\lambda)F_1^2(a) + n^2 F_4^2(\lambda)F_2^2(\lambda_n) + \\
& 2F_1^3(\lambda)F_5(\lambda) + \lambda^4 F_1^3(\lambda) - k_1 a F_1(\lambda)F_3^2(\lambda) - k_1 a F_1(\lambda)F_4^2(\lambda) - k_2 a F_1(\lambda)F_3^2(\lambda) + \\
& 2k_1 a F_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - k_2 a F_1(\lambda)F_4^2(\lambda) - 2k_1 a F_2^2(\lambda)F_5(\lambda) + 2k_2 a F_1^2(\lambda)F_5(\lambda) - \\
& nk_1 a F_4^2(\lambda)F_1(\lambda_n) - nk_2 a F_4^2(\lambda)F_1(\lambda_n) - \lambda^4 k_1 a F_1^2(\lambda) + \lambda^4 k_1 a F_2^2(\lambda) - \lambda^4 k_2 a F_1^2(\lambda) - \\
& 2F_1(\lambda)F_2^2(\lambda)F_5(\lambda) - 2nF_1(\lambda)F_3^2(\lambda)F_1(\lambda_n) - 2nF_1(\lambda)F_3^2(\lambda)F_2(\lambda_n) - \\
& 2nF_1(\lambda)F_4^2(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2n^2 F_1(\lambda)F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + 4nF_1^2(\lambda)F_5(\lambda)F_1(a) - \\
& 2n^2 F_1(\lambda)F_5(\lambda)F_2(a) - 2nF_2^2(\lambda)F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + \lambda^4 F_1(\lambda)F_2^2(\lambda) - n^2 \lambda^4 F_1(\lambda)F_1(\lambda_n) - \\
& 2n\lambda^4 F_1^2(\lambda)F_1(\lambda_n) + n^2 \lambda^4 F_1(\lambda)F_2(\lambda_n) + n\lambda^4 F_2^2(\lambda)F_1(\lambda_n) - \\
& k_1 k_2 a^2 F_4^2(\lambda) + 2k_1 k_2 a^2 F_1(\lambda)F_5(\lambda) - \lambda^4 k_1 k_2 a^2 F_1(\lambda) + 2k_1 a F_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) + \\
& 2nk_1 a F_1(\lambda)F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2nk_2 a F_1(\lambda)F_5(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2F_1(\lambda)F_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda) - \\
& n\lambda^4 k_1 a F_1(\lambda)F_1(\lambda_n) - n\lambda^4 k_2 a F_1(\lambda)F_1(\lambda_n) + 2nF_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda)F_1(\lambda_n) + \\
& 2nF_2(\lambda)F_3(\lambda)F_4(\lambda)F_2(\lambda_n) = 0
\end{aligned} \quad (15)$$

Na rys. 8 przedstawiono wykresy zależności  $\lambda^2(EJ_s/EJ_r)$  ram o podatnie zamocowanym ryglu w słupach. Zobrazowano pasma częstości drgań zależne od stosunku sztywności słupów do rygła  $EJ_s/EJ_r$  przy sztywności obrotowej węzłów rygli i słupów zawartej w przedziale  $0 < k_1 = k_2 < 1$ . Na rys. 8 krzywa *A* dotyczy górnego ograniczenia pierwszej częstości drgań własnych o sztywnych węzłach rygla i słupów przy  $k_1 = k_2 = 1$ . Krzywa *B* dotyczy natomiast dolnego ograniczenia częstości drgań własnych ram o idealnie przegubowych węzłach rygli i słupów  $k_1 = k_2 = 0$ .



Rys. 8. Współczynniki  $\lambda^2$  częstości drgań własnych ram portalowych o podatnie zamocowanym ryglu w słupach w funkcji zmiennego stosunku sztywności słupa do rygla  $EJ_s/EJ_r$

Fig. 8. The coefficients of  $\lambda^2$  frequency vibration portal frames semi-rigid mounted on the girder in the columns as a function of variable relative stiffness of the column to girder  $EJ_s/EJ_r$ .

Z przedstawionego wykresu pasma częstości drgań wynika, że przy węzłach przegubowych rygla i słupów występuje znacząca zmiana częstości drgań ram przy zwiększaniu sztywności rygla. Natomiast zwiększanie sztywności obrotowej węzła rygla i słupa prowadzi do stabilizacji częstości drgań na poziomie charakteryzującym konstrukcje ciągle niezależnie od stosunku sztywności rygla do słupa  $EJ_s/EJ_r$ .

## 5. Wnioski

Analizę diagnostyczną ram możemy przeprowadzać poprzez rejestrowanie przebiegu drgań swobodnych pierwszego rzędu na próbnym montażu oraz szacowanie na ich podstawie rzeczywistej sztywności obrotowej węzłów.

Uszkodzone elementy ram zawarte w zbiorze ram o jednakowych parametrach można wyszukiwać wprost na podstawie porównania analizy drgań swobodnych z obliczonymi teoretycznie.

Przedział współczynnika pierwszej częstości drgań  $\lambda^2$  ram z podatnie zamocowanymi ryglami wynosi od 0,74-0,95 i jest znacząco mniejszy od przedziału częstości drgań ram z podatnie zamocowanymi słupami który waha się od 1,83 do

1,96. Oznacza to, iż na częstość drgań własnych ram portalowych dużo większy wpływ ma sztywność zamocowania słupów w fundamentach aniżeli sztywność zamocowania rygli w słupach.

Zmniejszenie sztywności obrotowej węzłów rygli oraz słupów w ramach portalowych spowodowane na przykład stosowaniem połączeń doczołowych powoduje dużą zmianę momentów podporowych i zwiększenie momentów przęsłowych stowarzyszonych ze zmianą częstości drgań ram.

Zwiększanie sztywności rygla do słupa znacząco zmienia częstość drgań własnych przy połączeniach przegubowych rygli i słupów. W miarę zwiększania sztywności obrotowej węzłów następuje stabilizacja częstości drgań na poziomie charakteryzującym konstrukcje ciągłe.

Zmieniając w trybie wzmocnienia połączenia przegubowe w podatne możemy zwiększyć nośność rygli jednocześnie zmniejszając nośność słupów ram oraz kontrolować sztywność węzłów na podstawie analizy drgań swobodnych konstrukcji.

## Literatura

- [1] Attarnejada R., Pirmoz A.: Nonlinear analysis of damped semi-rigid frames considering moment–shear interaction of connections, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 81, 04 2014, pp. 165-173.
- [2] Basiński W.: Wyznaczanie sztywności obrotowej doczołowych połączeń podatnych w konstrukcjach metalowych na podstawie pomiaru drgań, Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 2006.
- [3] Basiński W.: Displacements amplitude of forced vibration in double-slope SIN girders with semirigid joint, *Czasopismo Inżynierii Łądowej, Środowiska i Architektury - Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture, JCEEA*, t. XXXII, z. 62 (4/15), 2015, s. 7-18, DOI:10.7862/rb.2015.174.
- [4] Basiński W., Kowal Z., Obara P.: Diagnostyczne oszacowanie sztywności zamocowania dźwigarów stalowych. LV Konferencja Naukowa KILIW PAN i KNPZITB, Krynica 2009.
- [5] Basiński W., Kowal Z.: Determination of moments distribution in continuous beams with semirigid connections on the basis of vibration measurements, XII Międzynarodowa Konferencja Naukowo – Techniczna, Konstrukcje Metalowe, Wrocław 2011, pp. 234-235.
- [6] Bródka J., Kozłowski A.: Sztywność i nośność węzłów podatnych. Politechnika Białostocka – Politechnika Rzeszowska. Białystok – Rzeszów 1996.
- [7] Chan S. L.: Vibration and modal analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, 16, Issue 1, 1994, pp. 25-31.
- [8] Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli, Arkady, Warszawa 1998.
- [9] Galvao A., Silva A., Silveira R., Goncalves P.: Nonlinear dynamic behavior and instability of steel frames with semi-rigid connections, *International Journal of Mechanical Sciences* 52/2010, pp. 1547-1562.
- [10] Giżejowski M.: Modele obliczeniowe stalowych ram płaskich z węzłami podatnymi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2002.

- [11] Kowal Z.: Dynamika nieważkiej belki na podporach lepkosprężystych, *Archiwum Inżynierii Lądowej* 1/1966, t, XII, s, 29-42.
- [12] Kowal Z.: Niezawodność belek o połączeniach odkształcalnych, *Konstrukcje stalowe* 8/2003.
- [13] Kawashima S., Fujimoto T.: Vibration analysis of frames with semi-rigid connections, *Computer and Structures* vol 19, Issues 1-2, 1984, pp. 85-92.
- [14] Langer J. *Dynamika budowli*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [15] Rakowski G, i inni: *Mechanika Budowli z Elementami Ujęcia Komputerowego*, rozdz. 7, Arkady, Warszawa 1972.
- [16] Sophianopoulos D. S.: The effect of joint flexibility on the free elastic vibration characteristics of steel plane frames, *Journal of Constructional Steel Research*, 59, Issue 8, 2003, p. 995-1008.
- [17] PN-EN 1993-1-8, *Projektowanie konstrukcji stalowych, Część 1 – 8, Projektowanie węzłów*, 2006.

## DETERMINATION OF ROTATIONAL STIFFNES SEMIRIGID JOINTS IN THE ONE STOREY FRAMES ON THE BASIS OF VIBRATION MEASUREMENTS

### Summary

The study shows the diagnostic method of estimation of the real rotational stiffness of semirigid joints in the portal steel frames on the basis of the measurement of the frequency of first-order free vibrations to estimate the real distribution of bending moments. The analysis was carried out for frames with a semirigid mounted beam in the columns and frames with a semirigid mounted columns in the foundation. Graphs of the coefficient  $\lambda^2(k)$  frequency vibrations of the frame as a function of the normalized parameter  $k$  rotational stiffness joints was done at a constant ratio of the stiffness of the column to beam  $EJ_s/EJ_r$ . Zone of frequencies of vibration-story frame with a variable ratio of the stiffness of the column to beam  $EJ_s/EJ_r$  was determined. Taken for continuously changing the rotational stiffness semirigid joints from the pinned joints to a rigid mounting. Contains an array of dynamic parameters  $\lambda^2(k)$  as a function of normalized parameters stiffness connections  $k_1/k_2$ .

**Keywords:** rotational stiffness, free vibrations, zone frequency vibrations

*Przesłano do redakcji: 16.04.2016 r.*

*Przyjęto do druku: 31.03.2017 r.*