

Andrzej POŻARYCKI¹
Przemysław GÓRNAŚ²

FUNKCJA SUM HARMONICZNYCH W SKRÓCONEJ PROCEDURZE OZNACZANIA ZESPOLONEGO MODUŁU SZTYWNOŚCI MMA

W standardowej procedurze oznaczania sztywności mieszanek mineralno-asfaltowych w funkcji częstotliwości obciążenia, powszechnie stosuje się metodę badań próbek obciążonych serią funkcji sinusoidalnych. W zależności od przyjętego wachlarza deklarowanych przez laboranta częstotliwości, procedura z serią badań stanowi procedurę inwazyjną, zwiększając jednocześnie prawdopodobieństwo wystąpienia zjawisk zmęczenia w badanych próbkach podczas realizowania testu. W pracy, w miejsce powszechnie stosowanej procedury zaproponowano obciążenie w formie funkcji utworzonej jako sumy funkcji harmonicznyc. Na podstawie analizy wyników badań sztywności próbki belkowej wykazano, że proponowane podejście wyraźnie skraca czas procedury oznaczania zespolonego modułu sztywności, a różnice między standardowym ujęciem a tym proponowanym w pracy są w przeważającej większości mniejsze niż 2 %.

Słowa kluczowe: moduł sztywności, mieszanki mineralno-asfaltowe, transformata Fouriera, analiza częstotliwościowa

1. Wprowadzenie

Przyjęcie do obliczeń mechanistycznych [9], modelu wiernie odwzorowującego rzeczywiste warunki panujące w nawierzchni (np. model termodynamiczny [7] czy model z nieliniowymi materiałami warstw [10]) wiąże się z koniecznością włączenia do analizy parametrów, dla których określenie wartości jest często kłopotliwe w praktyce. W następstwie, w modelach obliczeniowych stosuje się szereg uproszczeń, które prowadzą do znanych modeli sprężystych w postaci: MET (Method of Equivalent Thickness) [4], LET (Layers Elastic Theory) [5], FEM (Finite Elements Method) [6], BEM (Boundary Elements Method) [1] czy SEM (Spectral Element Method) [3]. Nawiązując chociażby do

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Andrzej Pożarycki, Politechnika Poznańska, Instytut Inżynierii Lądowej, ul. Piotrowo 5, 61-138 Poznań, +48 61 647 5817, andrzej.pozarycki@put.poznan.pl

² Przemysław Górnaś, Politechnika Poznańska, Instytut Inżynierii Lądowej, ul. Piotrowo 5, 61-138 Poznań, +48 61 665 3489, przemyslaw.gornas@put.poznan.pl

warstw z mieszanek mineralno-asfaltowych, których sztywność zależy od temperatury i czasu trwania obciążenia, ograniczenia modeli sprężystych można w pewnym stopniu zastąpić modelowaniem układów lepkosprężystych. Źródłem lepkosprężystych parametrów modeli warstw z MMA mogą być metody przedstawione w pracach [8,12]. W przypadku wykorzystania metody [12], wymaga się przeprowadzenia badań próbek laboratoryjnych zgodnie z normą [14]. Próbkę obciąża się funkcjami sinusoidalnymi o różnej częstotliwości, a rezultatem takich testów są wartości zespolonych modułów sztywności. Praktycznym jednak ograniczeniem metody jest potencjalnie możliwe zjawisko niekontrolowanego zmęczenia testowanej próbki. W tzw. testach częstotliwościowych (ang. sweep frequency) [2], pomimo założeń o małych wartościach odkształcenia i minimalnej liczbie przyłożonych do próbki obciążeń, nie można bowiem wykluczyć wpływu mikrospektań na ocenianą sztywność. Sytuacja wygląda podobnie w przypadku budowania krzywych wiodących [11].

2. Cel pracy i zakres

Za cel pracy przyjęto relację z próby wdrożenia skróconej procedury oznaczenia składowych zespolonego modułu sztywności mieszanek mineralno-asfaltowych w szerokim zakresie częstotliwości. Podstawą metody są wyniki badań próbki pryzmatycznej z mieszanki mineralno-asfaltowej (MMA), poddanej obciążeniom złożonym z sumy funkcji harmoniczných.

3. Analiza częstotliwościowa

Analizę częstotliwościową [13] stosuje się do przetwarzania sygnałów, a dokładniej do określania częstotliwości składowych zawartych w przebiegu czasowym funkcji. Podstawę analizy stanowi tzw. transformacja Fouriera (1), którą opracował francuski matematyk Jean Baptiste Joseph Fourier.

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i t \xi} dt \quad (1)$$

gdzie: t oznacza czas [s], a argument transformaty ξ określa częstotliwość [Hz=1/s]. W praktyce transformatę Fouriera wykonuje się dla danych dyskretnych, dla których całkę zastępuje się sumą (2), znaną z literatury jako szybka transformata Fouriera (ang. Fast Fourier Transform, FFT).

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} n \cdot k}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2)$$

gdzie: n - numer próbki sygnału, f_n - wartość n -tej próbki sygnału, k - numer harmoniczných, N - liczba próbek sygnału, i - jednostka urojona.

Bezpośrednim wynikiem zastosowania dyskretnej transformaty Fouriera jest ciąg liczb zespolonych, którego elementy są przyporządkowane odpowiednim częstotliwościom. Poprzez obliczenie modułu z liczby zespolonej, uzyskuje się wartości amplitudy, a część urojona z logarytmu naturalnego liczby zespolo-

nej jest równa kątowi fazy początkowej sygnału, co w przełożeniu na zapis matematyczny można zapisać w postaci symbolicznej wyrażonej wzorami (3, 4, 5).

$$F_k = x_k + y_k i \quad (3)$$

$$\text{abs}(F_k) = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = A_k \quad (4)$$

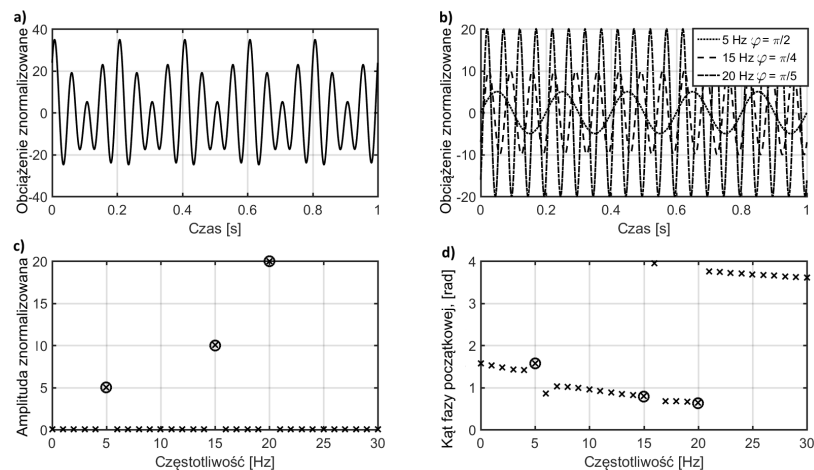
$$\text{im}(\ln(F_k)) = \varphi_k \quad (5)$$

gdzie: A_k i φ_k - odpowiednio amplituda i kąt fazy początkowej sygnału składowego dla k -ej częstotliwości.

Wykorzystując w obliczeniach opisaną logikę, oznaczeniu podlegają widma: częstotliwościowe (wyznaczenie amplitud) i fazowe (obliczenie przesunięcia sygnału w fazie względem początku układu współrzędnych), co w dalszej kolejności może prowadzić do oznaczenia składowych zespolonego modułu sztywności MMA.

4. Metodyka

Sednem skróconej procedury laboratoryjnej jest niestandardowe obciążenie próbki MMA. Podczas testu, zamiast generować w maszynie obciążenie sinusoidalne o różnej częstotliwości, próbka zostaje poddana obciążeniu funkcją złożoną z sumy funkcji harmoniczných (w skrócie funkcja sum harmoniczných). Syntetyczną funkcję sum harmoniczných, na którą składają się trzy funkcje sinus o częstotliwości 5, 15 i 20 Hz oraz kącie fazy początkowej równej odpowiednio $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{5}$, przedstawiono na rysunku (1) wraz z funkcjami składowymi i widmami.



Rys. 1. Ilustracja graficzna funkcji obciążenia złożonego z sum harmoniczných: a) funkcja sum harmoniczných, b) składowe harmoniczne, c) widmo amplitudowe, d) widmo fazowe

Fig. 1. Graphic illustration of the load obtained with the sum of harmonic load function: a) sum of harmonic load function, b) harmonics components c) amplitude spectrum, d) spectrum phase

Poprzez analogię do syntetycznego wzorca pokazanego na rysunku (1), zarejestrowane w trakcie badań laboratoryjnych przemieszczenia można traktować jako sygnał, na który składają się wpływy od wymuszonego obciążenia w postaci sumy funkcji harmoniczych. Analiza częstotliwościowa zarówno dla sygnału obciążenia jak i przemieszczenia stanowi już prostą drogę do obliczenia wartości amplitud i faz początkowych odpowiadających określonym częstotliwościom. Biorąc pod uwagę schemat statyczny belki pryzmatycznej zginanej stałym momentem, składowe zespolonego modułu sztywności MMA są opisane wzorami (6, 7).

$$E_1 = \gamma \cdot \left(\frac{F}{z}\right) \cdot \cos(\phi) + \frac{\mu}{10^3} \cdot \omega^2 \quad (6)$$

$$E_2 = \gamma \cdot \left(\frac{F}{z}\right) \cdot \sin(\phi) \quad (7)$$

gdzie: E_1 , E_2 - odpowiednio rzeczywista i urojona część modułu zespolonego [MPa], γ - współczynnik kształtu, μ - współczynnik masy, F - obciążenie [N], z - przemieszczenie [mm], ϕ - kąt przesunięcia fazowego [°], ω - częstotliwość funkcji obciążenia [Hz].

O ile wartości F i z odpowiadające określonej częstotliwości można bezpośrednio odczytać z otrzymanych widm amplitudowych, przesunięcie fazowe należy obliczyć z różnicy wartości kątów faz początkowych danej wzorem (8).

$$\phi = \varphi_z - \varphi_F \quad (8)$$

gdzie: φ_z , φ_F - kąty fazy początkowej odpowiednio funkcji przemieszczenia i obciążenia dla określonej częstotliwości.

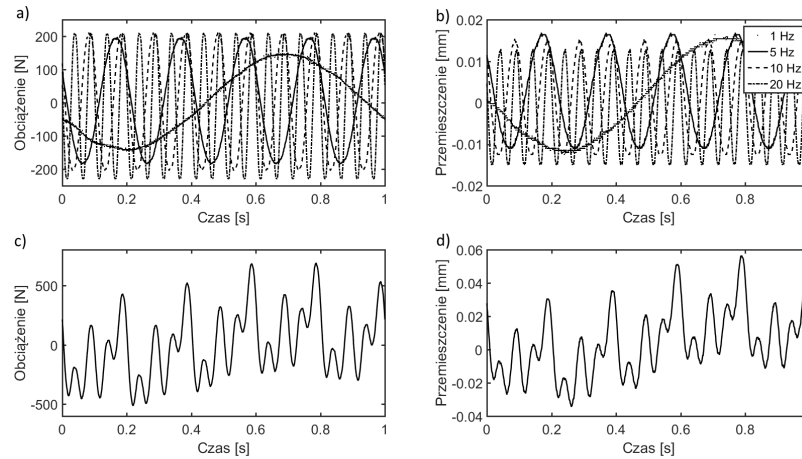
5. Eksperyment obliczeniowy

5.1. Oznaczanie zespolonego modułu sztywności

Do eksperymentu wykorzystano wyniki badań belki zginanej obciążonej harmonicznie (4PB-PR wg PN-EN 12697-26:2012). Oznaczenie modułów sztywności przeprowadzono dla próbek wyciętych z warstw asfaltowych nawierzchni odcinka testowego, ścieralnej (BA 12 S - 4 próbki) i podbudowy (BA 25 P - 5 próbek). Zakres badań obejmuje cztery różne częstotliwości obciążeń harmoniczych (1, 5, 10, 20 Hz). Badania wykonano przy stałej temperaturze próbek równej 16 °C.

5.2. Przygotowanie danych

Kierując się zasadą superpozycji (zasada niezależności działania obciążeń), wyniki badań metodą 4PB-PR można zsumować, co teoretycznie prowadzi do obciążenia w postaci funkcji sum harmoniczych. Przykładowe efekty sumowania sygnałów dla pojedynczej próbki belkowej pobranej z warstwy podbudowy asfaltowej przedstawiono na rysunku (2).



Rys. 2. Dane wejściowe dla próbki belkowej pobranej z warstwy podbudowy: a i c) odpowiednio składowe harmoniczne i funkcja sum harmoniczných obciążenia, b i d) odpowiednio składowe harmoniczne i funkcja sum harmoniczných przemieszczenia

Fig. 2. The input data for the sample beam collected from base course: a and c) respectively harmonics components and the sum of harmonic load function, b and d) harmonics components and the sum of harmonic displacement function

Dla tak uzyskanych sygnałów przemieszczenia i obciążenia przeprowadzono analizy częstotliwościowe.

5.3. Wyniki obliczeń

W tabeli (1) zestawione są wartości części rzeczywistej i urojonej zespolonego modułu sztywności MMA. Zestawienie przedstawia zarówno wyniki obliczeń dla belek pryzmatycznych obciążonych serią funkcji sinusoidalnych o różnej częstotliwości jak i pojedynczą funkcją sum harmoniczných. Symbolami EI i EII oznaczono części rzeczywistą i urojoną, obliczone na podstawie wyników badań próbek odpowiadających warunkom obciążenia funkcją sum harmoniczných. Analogicznie, symbole E1 i E2 oznaczają części rzeczywistą i urojoną, obliczone na podstawie wyników badań próbek poddanych obciążeniom w kształcie funkcji sinus o różnej częstotliwości.

6. Dyskusja

Przy standardowej procedurze oznaczania sztywności MMA w funkcji częstotliwości obciążenia, powszechnie stosuje się metodę badań próbek obciążonych serią funkcji sinusoidalnych. Przyjmując określoną sekwencję częstotliwości w każdej serii, badania mają jedną niedogodność. Programując bowiem szeroki wachlarz częstotliwości obciążenia próbek, liczba cykli w naturalny sposób zaczyna mieć wpływ na niemonitorowany rozwój zjawisk zmęczeniowych w ba-

Tabela 1. Zestawienie typowych wartości części rzeczywistej (EI oraz E1) i urojonej (EII oraz E2) zespolonych modułów sztywności MMA, obliczonych dla wyników badań próbki obciążonej odpowiednio funkcją sum harmonicznych jak i funkcjami sinus o różnej częstotliwości

Table 1. Summary of typical values of real part (EI and E1) and imaginary (EII and E2) complex modules stiffness MMA, calculated for the test with loaded properly sum of harmonic load function and sine functions with different frequency

MMA	Nr próbki	f	EI	E1	δ	EII	E2	δ
		[Hz]	[MPa]		[%]	[MPa]		[%]
BA 25 P	1	1	6887,7	6889,1	0,02	2008,9	2010,6	0,08
		5	9207,1	9232,3	0,27	2061,4	2078,9	0,85
		10	10115,3	10106,9	0,08	2021,2	1975,6	2,26
		20	10918,9	10820,7	0,90	1935,1	1933,3	0,09
				Średnia różnica [%]		0,32	Średnia różnica [%]	

	5	1	5759,5	5760,9	0,02	1759,7	1759,1	0,03
		5	7667,6	7669,4	0,02	1849,3	1844,1	0,28
		10	8454,7	8477,3	0,27	1892,9	1890,2	0,14
		20	9341,7	9285,8	0,60	1902,3	1852,1	2,64
			Średnia różnica [%]		0,23	Średnia różnica [%]		0,77
BA 12 S	6	1	4019,3	4020,3	0,02	1409,9	1409,5	0,03
		5	5682,8	5684,2	0,02	1527,0	1530,5	0,23
		10	6377,4	6368,1	0,15	1560,6	1521,8	2,49
		20	7068,1	6987,1	1,15	1578,6	1508,1	4,47
				Średnia różnica [%]		0,34	Średnia różnica [%]	

	9	1	1824,9	1825,1	0,01	959,7	958,2	0,16
		5	2768,9	2763,0	0,21	1231,6	1234,2	0,21
		10	3305,9	3294,5	0,34	1224,2	1245,5	1,74
		20	4010,2	4041,7	0,79	1391,8	1361,0	2,21
			Średnia różnica [%]		0,34	Średnia różnica [%]		1,08

gdzie: f – częstotliwość [Hz], δ – różnica względna [%]

danych próbkach MMA, na co wyraźnie zwracają uwagę przede wszystkim autorzy normy [14]. Analiza wyników badań laboratoryjnych w ujęciu zarówno standardowej procedury jak i tej proponowanej w pracy pozwala zauważyć, że średnia względna różnica między wartościami części rzeczywistych (EI i E1 – odpowiedzialnych za prawidłowe oznaczenie amplitudy funkcji obciążenia) zespolonych modułów sztywności MMA wynosi 0,26% (przy statystycznym rozstępie między skrajnymi wartościami, równym 1,15%). Wartość średnia względnej różnicy między wartościami części urojonych (odpowiedzialnych za oznaczenie wartości kąta fazy początkowej funkcji obciążenia) jest równa 1,21%, a maksymalna; 4,47%.

Warto wziąć również pod uwagę, że proponowane rozwiązanie stwarza duże prawdopodobieństwo skrócenia czasu prowadzenia badań. Standardowo zaleca się np. 100 cykli obciążenia przypadających na każdą częstotliwość. Decydując się np. na sekwencję obciążeń o częstotliwościach 1, 5, 10, 15, 20, 25, 50 Hz,

zgodnie z zaleceniami normy [14] próbkę obciąża się 1400 razy (obowiązuje również sekwencja odwrotna). W przypadku proponowanej metody, zakłada się że będzie to około 250 cykli. Mimo wszystko, dane te należy jeszcze potwierdzić w badaniach laboratoryjnych na większą skalę.

7. Podsumowanie i wnioski

W pracy przedstawiono rozwiązanie opierając się na znanych zależnościach lepko-sprężystości. Utrzymując w mocy standardowe założenia procedury oznaczania zespolonego modułu sztywności MMA metodą belki pryzmatycznej, zginanej stałym momentem, wykorzystano twierdzenie Fouriera. W miejsce powszechnie stosowanej procedury z serią pojedynczych badań próbki MMA, poddawanej kolejnym obciążeniom w kształcie funkcji sinus o różnych częstotliwościach obciążenia, zaproponowano obciążenie w formie funkcji utworzonej jako sumę funkcji harmoniczných branych pod uwagę w standardowej procedurze.

Sformułowane w analizie wyników badań wnioski sugerują, że zarówno średnia względna różnica między wartościami części rzeczywistych (E_I i E_1) zespolonych modułów sztywności MMA jak i średnia względnej różnicy między wartościami części urojonych są mniejsze od 2 %. To oznacza, że istnieją silne podstawy do budowania baz danych o właściwościach mieszanek mineralno-asfaltowych w szerokim zakresie częstotliwości obciążenia, posługując się skróconą wersją obowiązującej w laboratoriach drogowych procedury normowej oznaczania sztywności.

Należy również podkreślić, że uzyskane wyniki stanowią przede wszystkim podstawę do wyznaczenia kierunku dalszych badań. Weryfikacji bowiem wciąż podlegają zarówno ścieżka analizy wpływu proponowanej metody na zmiany w strukturze materiału oraz zachowanie lepko-sprężyste w zależności od temperatury badania, jak i korzyści płynące ze skrócenia czasu badań w porównaniu do standardowego podejścia.

Literatura

- [1] Birgisson, B., Crouch, S.L., Newcomb, D.E.: Static and dynamic boundary element methods for layered pavement systems, Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy, 1997, <http://purl.umn.edu/155116> [dostęp: 28 marca 2016 r.].
- [2] Brown E.R., Kandhal P.S., Zhang J.: Performance Testing for Hot Mix Asphalt. National Center for Asphalt Technology, NCAT Report No. 01-05, Auburn, AL., 2001.
- [3] Chun-Ying W., Xue-Yan L., Scarpas A., Xiu-Run G.: Spectral Element Approach for Forward Models of 3D Layered Pavement, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, tom 12, nr 2, str. 149-158, 2006.
- [4] El-Badawy M., Kamel M.A.: Assessment of Improvement of the Accuracy of the Odemark Transformation Method, International Journal of Advanced Engineering Sciences and Technologies, tom 5, nr 2, str. 105-110, 2011.
- [5] Firlej S.: Mechanika nawierzchni drogowej, Petit s.c., Lublin, 2007.

- [6] Górnaś P., Pożarycki A.: Wybrane cechy numerycznych modeli MES w analizie odwrotnej konstrukcji nawierzchni, Roads and Bridges - Drogi i Mosty, tom 13, nr 3, str. 203-222, 2014.
- [7] Graczyk M.: Nośność konstrukcji nawierzchni wielowarstwowych w krajowych warunkach klimatycznych, Studia i materiały, IBDiM, zeszyt 63, Warszawa 2010.
- [8] Jaczewski M., Mejłun Ł.: Wyznaczanie parametrów lepkosprężystego modelu Burgersa mieszanek mineralno-asfaltowych na podstawie badania pod obciążeniem dynamicznym, Drogownictwo, nr 11, 2013.
- [9] Katalog przebudów i remontów nawierzchni podatnych i półsztywnych, KPRNPP-2013, GDDKiA, IBDiM, Warszawa 2013.
- [10] Kim M., Tutumluer E., Kwon J.: Nonlinear Pavement Foundation Modeling for Three-Dimensional Finite-Element Analysis of Flexible Pavements, International Journal of Geomechanics, tom 9, nr 5, str. 195-208, 2009.
- [11] Kukiełka J., Sybilski D.: Cechy reologiczne mieszanki mineralno-cementowo-emulsyjnej na podstawie krzywej wiodącej, I Polski Kongres Drogowy, Warszawa, 04-06 października 2006 r. str. 461-468.
- [12] Pożarycki A., Górnaś P.: Numeryczny model właściwości lepkosprężystych warstw nawierzchni jezdni z betonu asfaltowego, Budownictwo i Architektura, tom 13, nr 4, str. 101-107, 2014.
- [13] Zieliński T. P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2007.
- [14] PN-EN 12697-24:2008, Mieszanki mineralno-asfaltowe -- Metody badań mieszanek mineralno-asfaltowych na gorąco -- Część 24: Odporność na zmęczenie.

THE SUM OF HARMONIC FUNCTIONS IN THE EFFICIENT PROCEDURE OF COMPLEX MODULUS DETERMINATION OF HMA

Summary

In the standard procedure for determining the stiffness of asphalt mineral-mixture is commonly used loaded with a series of sinusoidal functions. Depending on the accepted range declared by the laboratory frequency procedure with a series of tests is an invasive procedure, while increasing the probability of fatigue phenomena in test samples while carrying out the test. In the article, instead of the commonly used procedures offered load in the form of a function created as a sum of harmonic functions. Based on the analysis of test results stiffness of the sample beam has been shown that the proposed approach significantly reduces the time of the procedure for determining the complex modulus, and the differences between standard approach and the approach proposed in the article in majority cases was less than 2%.

Keywords: stiffness modulus, hot mix asphalt, frequency analysis, Fourier transform

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/rb.2016.86