

Dominika PILARSKA¹

PRĘTOWE KOPUŁY GEODEZYJNE – PROPOZYCJE PRZEKRYĆ DUŻYCH POWIERZCHNI

W artykule przedstawiono propozycje przekryć dużych powierzchni w postaci zaprojektowanych ośmiu jednowarstwowych kopuł geodezyjnych. Kopuły te ukształtowaną na podstawie opracowanych przez Fullera procedur podziału sfery na trójkąty sferyczne. Korzystając z zaproponowanych przez Fullera metod podziału dwudziestościanu foremny, zaprojektowano osiem zupełnie nowych jednowarstwowych kopuł prętowych, których wyjściowym wielościanem jest ośmiościan foremny. Zaprojektowane kopuły, których każda średnica jest równa 50m, różnią się między sobą stopniem zagęszczenia prętów. Porównano i zaprezentowano podstawowe parametry geometryczne wygenerowanych konstrukcji. Zwymiarowano je, zgodnie z wymaganiami normowymi, dobierając do każdej grupy prętów przekroje poprzeczne z rur okrągłych. Utworzone prętowe kopuły geodezyjne poddano obciążeniom stałym oraz zmiennym, tworząc różne kombinacje obciążeń. Przeprowadzono również szczegółową analizę statyczną. Analizowano i oceniano zależności powstałe między siłami osiowymi, przemieszczeniami węzłów oraz naprężeniami normalnymi w prętach a przyjętymi kombinacjami obciążeń. Dla najbardziej niekorzystnych kombinacji obciążeń wyniki zestawiono w tabelach i zilustrowano na rysunkach. Przedstawione w artykule prętowe kopuły geodezyjne mogą stanowić oryginalne przekrycia kopułowe dużych powierzchni. Rozpięte na sferze siatki prętów mogą zapewniać geometryczną niezmienną strukturę, charakteryzować się małą wrażliwością na przeskok węzłów, a także posiadać optymalne własności technologiczno-ekonomiczne, czyli składać się z jak najmniejszej liczby elementów różnych i zużywać mało materiału (np. stali).

Słowa kluczowe: przestrzenny system konstrukcyjny, geometryczne kształtowanie kopuł, topologia konstrukcji, analiza statyczna

1. Wprowadzenie

Wśród konstrukcji budowlanych znajdują się takie konstrukcje, głównie przestrzenne, dla których szczególnie istotne jest powiązanie trójwymiarowej pracy skomplikowanych układów prętowych. Należą do nich np. przestrzenne konstrukcje kratowe tworzące układy przestrzenne podobne do kopuł, powłok,

¹ Dominika Pilarska, Politechnika Opolska, Wydział Budownictwa i Architektury, ul. Katowicka 48, 45-061 Opole, tel. 77/449 85 44, e-mail: d.pilarska@po.opole.pl

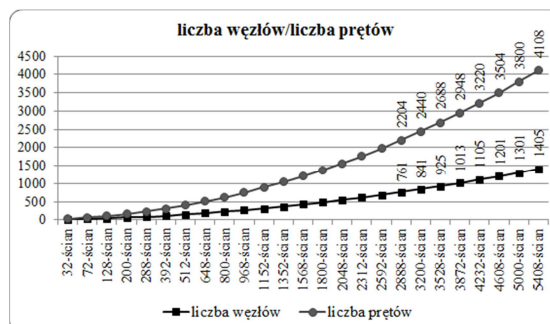
itp. Takie struktury stanowią szczególne wyzwanie w analizach topologiczno-geometrycznych pozwalających najbardziej racjonalnie je projektować. Wśród wspomnianych konstrukcji szczególną uwagę skupiają układy, których podstawą kształtowania są wielościany foremne. Stanowią je kopuły geodezyjne, których prekursorem jest Richard Buckminster Fuller. Na przykładzie dwudziestościanu jako bryły wyjściowej, opracował on procedury podziału sfery na trójkąty sferyczne, tworząc tym samym możliwość konstruowania lekkich, wytrzymałych, samonośnych i ekonomicznych przekryć [1,3]. Ekonomiczność wiąże się z zastosowaniem prostoliniowych prętów i w konsekwencji płaskich „oczek” o niewielkim zróżnicowaniu długości krawędzi.

Koncepcje Fullera zainspirowały architektów i konstruktorów do dalszych rozwiązań projektowania kopuł prętowych wywodzących się z wielościanów foremnych, w tym przede wszystkim z dwudziestościanu i dwunastościanu. Struktury prętowe wygenerowane z ośmiościanu foremnego zostały jak dotąd słabo rozwinięte. Dlatego też celem niniejszej pracy jest przedstawienie propozycji ośmiu prętowych kopuł geodezyjnych, zaprojektowanych na przekrycia dużych powierzchni, których podstawą kształtowania jest ośmiościan foremny. Oprócz opracowania topologiczno-geometrycznego algorytmu pozwalającego na tworzenie struktur o coraz to większym zagęszczeniu wyjściowego oczka ośmiościanu foremnego, dokonano również bardzo szczegółowej analizy statyczno-wytrzymałościowej zaprojektowanych ośmiu kopuł. Opracowane modele stanowią oryginalne przekrycia kopułowe i są wyznacznikiem współczesnego postępu myśli twórczej w projektowaniu i wykonawstwie budowlanym.

2. Budowa zaprojektowanych prętowych kopuł geodezyjnych

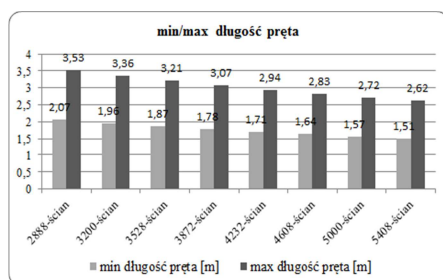
Powierzchnią bazową przy kształtowaniu geodezyjnych kopuł jest sfera, która jest aproksymowana poprzez podział na coraz to mniejsze trójkąty sferyczne. Zagęszczenie wyjściowego oczka ośmiościanu foremnego mniejszymi trójkątami odbywa się dzieląc jego krawędzie na n części i prowadząc trzy rodziny linii równoległych do linii ich wysokości [2,3,5]. Z przedstawionego sposobu przekształcenia otrzymujemy kolejno: 32-ścian, 72-ścian, 128-ścian, 200-ścian, itd. Wielościany pochodne stanowiące podstawy zaprojektowanych ośmiu struktur zostały dobrane w taki sposób, aby spełniały wymagania projektowo-konstrukcyjne dla przekryć dużych powierzchni. Są to 2888-ścian, 3200-ścian, 3528-ścian, 3872-ścian, 4232-ścian, 4608-ścian, 5000-ścian oraz 5408-ścian. Zaprojektowane prętowe kopuły geodezyjne mają średnice 50m, ich elementy z rur okrągłych połączono przegubowo, a oparcia utwierdzono. Modele numeryczne zaprojektowanych konstrukcji zdefiniowano w programie Autodesk Robot Structural Analysis.

Podstawowe parametry geometryczne opracowanych ośmiu struktur, tj. liczbę węzłów, liczbę prętów, minimalne i maksymalne długości prętów oraz liczbę grup prętów o tych samych długościach zilustrowano na rysunkach 1-3.



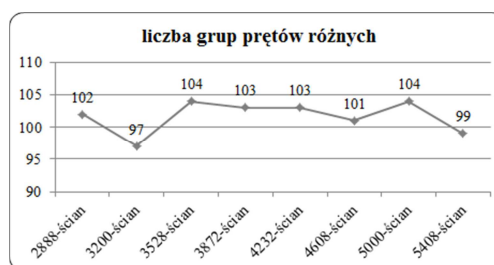
Rys. 1. Liczba węzłów oraz liczba prętów w zaprojektowanych ośmiu prętowych kopułach geodezyjnych

Fig. 1. The number of nodes and the number of bars in designed eight geodesic bars' domes



Rys. 2. Minimalne i maksymalne długości prętów w zaprojektowanych ośmiu prętowych kopułach geodezyjnych

Fig. 2. Minimum and maximum lengths of bars in designed eight geodesic bars' domes



Rys. 3. Liczba grup prętów o różnych długościach w zaprojektowanych ośmiu prętowych kopułach geodezyjnych

Fig. 3. The number of groups of bars with different lengths in designed eight geodesic bars' domes

3. Obliczenia statyczne

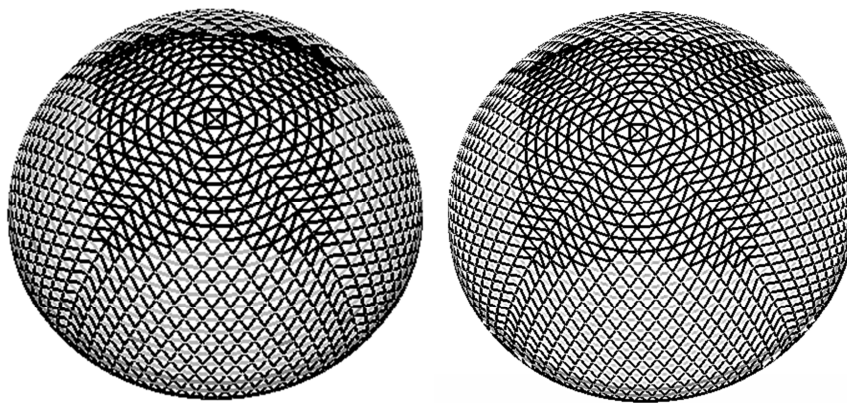
3.1. Założenia

Obliczenia statyczne uwzględniające analizę I rzędu przeprowadzono w programie Autodesk Robot Structural Analysis. Przy obciążaniu zaprojektowanych kopuł prętowych uwzględniono obciążenia stałe, tj. od ciężaru własnego konstrukcji oraz od ciężaru pokrycia stanowiącego tafle szkła o ciężarze $0,6 \text{ kN/m}^2$, jak również zmienne, tj. od śniegu oraz od wiatru dla 1 strefy klimatycznej, dla której wartość charakterystycznego ciśnienia prędkości wiatru wynosi $0,3 \text{ kN/m}^2$. W przypadku obciążania śniegiem przyjęto szerokość połaci $l_s = \text{ok. } 40 \text{ m}$, na której kąt nachylenia stycznej spełnia warunek $\phi < 60^\circ$ (zgodnie z PN-EN 1991-1-3). Z przedstawionych oddziaływań utworzono 12 kombinacji obciążeń. Kombinacje nr 1-4 uwzględniają oddziaływania stałe oraz wiodące

oddziaływania zmienne od wiatru i towarzyszące oddziaływania zmienne od śniegu. Kombinacje nr 5-8 obejmują oddziaływania stałe oraz wiodące oddziaływania zmienne od śniegu i towarzyszące oddziaływania zmienne od wiatru. Kombinacje nr 9-12 to oddziaływania stałe oraz wiodące oddziaływania zmienne od wiatru.

3.2. Wymiarowanie

Uwzględniając rozkład naprężeń w poszczególnych prętach, przy obciążeniu ciężarem własnym, w każdej zaprojektowanej kopule wyodrębniono cztery grupy prętów. Rysunek 4 przedstawia dwie spośród ośmiu zaprojektowanych kopuł, utworzone z 4232-ścianu oraz 5408-ścianu, jako przykłady przedstawiające wydzielone grupy prętów.



Rys. 4. Podział na grupy prętów w kopule utworzonej z 4232-ścianu i 5408-ścianu

Fig. 4. The division into groups of bars in the dome shaped from 4232-hedron and 5408-hedron

Oceniono stopień wykorzystania nośności zaprojektowanych prętów. W każdej opracowanej kopule zaprojektowano poszczególne grupy prętów, których przekroje poprzeczne spełniają wymagania normowe. Najbardziej wyťažone elementy w poszczególnych grupach prętów są wykorzystane w 82-90%. W tabeli 1 zestawiono zaprojektowane przekroje poprzeczne wraz ze współczynnikami wyężenia dla poszczególnych grup prętów, przy najbardziej niekorzystnej kombinacji obciążeń, we wszystkich zaprojektowanych kopułach[4].

Tabela 1. Przekroje poprzeczne poszczególnych grup prętów wraz ze współczynnikami wyężenia przy najbardziej niekorzystnym przypadku kombinacji dla zaprojektowanych kopuł prętowych

Table 1. The cross-sections of the individual groups of bars with the effort factors, taking into account the most unfavourable case of the combination for the designed bars' domes

kopuła 2888-ścian				kopuła 3872-ścian				kopuła 5000-ścian			
nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek	nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek	nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek
grupa 1	R 60,3x10,0	0,89	KOMB1	grupa 1	R 54,0x8,0	0,89	KOMB3	grupa 1	R 60,3x8,0	0,83	KOMB2
grupa 2	R 70,0x8,0	0,85	KOMB1	grupa 2	R 63,5x8,0	0,84	KOMB1	grupa 2	R 70,0x7,1	0,82	KOMB2
grupa 3	R 44,5x3,6	0,89	KOMB10	grupa 3	R 42,4x3,6	0,90	KOMB4	grupa 3	R 42,4x5,0	0,89	KOMB1
grupa 4	R 44,5x5,6	0,84	KOMB2	grupa 4	R 44,5x6,3	0,85	KOMB4	grupa 4	R 51,0x6,3	0,85	KOMB1
kopuła 3200-ścian				kopuła 4232-ścian				kopuła 5408-ścian			
nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek	nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek	nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek
grupa 1	R 63,5x8,0	0,85	KOMB4	grupa 1	R 54,0x8,0	0,86	KOMB2	grupa 1	R 60,3x8,0	0,89	KOMB2
grupa 2	R 70,0x8,0	0,80	KOMB1	grupa 2	R 63,5x8,0	0,83	KOMB1	grupa 2	R 70,0x7,1	0,82	KOMB4
grupa 3	R 44,5x4,0	0,89	KOMB9	grupa 3	R 42,4x4,0	0,86	KOMB11	grupa 3	R 51,0x6,3	0,88	KOMB2
grupa 4	R 44,5x5,6	0,87	KOMB2	grupa 4	R 44,5x6,3	0,89	KOMB1	grupa 4	R 48,3x6,3	0,87	KOMB2
kopuła 3528-ścian				kopuła 4608-ścian							
nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek	nr grupy	przekrój poprzeczny	wsp. wyężenia	przypadek				
grupa 1	R 70,0x5,6	0,82	KOMB3	grupa 1	R 60,3x8,0	0,86	KOMB3				
grupa 2	R 70,0x7,1	0,86	KOMB1	grupa 2	R 70,0x6,3	0,90	KOMB3				
grupa 3	R 42,4x3,2	0,90	KOMB2	grupa 3	R 42,4x5,0	0,84	KOMB3				
grupa 4	R 44,5x6,3	0,82	KOMB1	grupa 4	R 48,3x6,3	0,86	KOMB3				

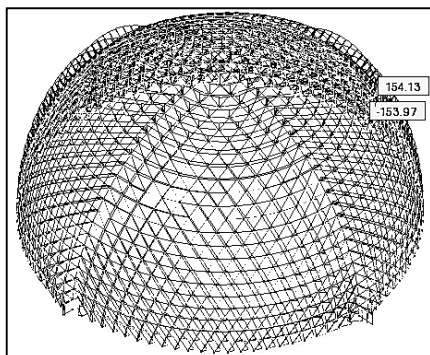
3.3. Wyniki analizy statycznej

Zaprojektowane kopuły prętowe poddano szczegółowym analizom statyki liniowej. W pierwszej kolejności skoncentrowano się na ocenie wartości ekstremalnych sił osiowych od różnych kombinacji obciążeń. Ekstremalne wartości sił ściskających i rozciągających występują w przypadku kombinacji złożonej z obciążeń stałych, wiatru jako czynnika wiodącego oraz śniegu jako czynnika towarzyszącego (przypadek: KOMB1). W tabeli 2 zestawiono obliczone wyniki wartości sił wewnętrznych w prętach we wszystkich zaprojektowanych ośmiu kopułach prętowych. Na rysunku 5 przedstawiono przykładową kopułę zaprojektowaną na podstawie 4608-ścianu z rozkładem sił osiowych w poszczególnych prętach, przy najbardziej niekorzystnym przypadku kombinacji obciążeń.

Tabela 2. Ekstremalne wartości sił ściskających i rozciągających dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji dla zaprojektowanych kopuł prętowych (KOMB1)

Table 2. The extreme values of tensile and compressive forces for the most unfavourable case of the load combination for the designed bars' domes (KOMB1)

kopuła	F max [kN]	F min [kN]	kopuła	F max [kN]	F min [kN]
kopuła 2888-ścian	137,57	-123,54	kopuła 4232-ścian	133,91	-144,92
kopuła 3200-ścian	136,32	-127,74	kopuła 4608-ścian	154,13	-153,97
kopuła 3528-ścian	128,06	-132,49	kopuła 5000-ścian	159,31	-162,57
kopuła 3872-ścian	136,41	-140,51	kopuła 5408-ścian	162,84	-167,46



Rys. 5. Rozkład sił osiowych dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji obciążeń dla przykładowej kopuły utworzonej z 4608-ścianu

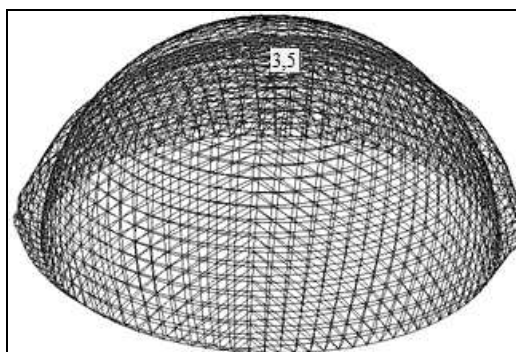
Fig. 5. Distribution of the axial forces for the most unfavourable case of the load combination in the exemplary bars' dome shaped from 4608-hedron

Kolejna przeprowadzona analiza statyczna dotyczyła sprawdzenia deformacji zaprojektowanych kopuł w zależności od przypadku kombinacji obciążeń. We wszystkich zaprojektowanych kopułach największe przemieszczenia węzłów wystąpiły w przypadku kombinacji uwzględniającej ciężar własny, śnieg jako obciążenie wiodące oraz wiatr jako obciążenie towarzyszące (przypadek: KOMB5). W tabeli 3 zestawiono wielkości przemieszczeń węzłów dla wszystkich zaprojektowanych kopuł. Na rysunku 6 zaprezentowano wartości przemieszczeń dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji obciążeń dla przykładowej kopuły wygenerowanej na podstawie 4608-ścianu.

Tabela 3. Wielkości przemieszczeń węzłów dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji dla zaprojektowanych kopuł prętowych (KOMB5)

Table 3. The displacements' values of nodes for the most unfavourable case of the load combination for the designed bars' domes (KOMB5)

kopuła	max przemieszczenie [cm]
kopuła 2888-ścian	2,61
kopuła 3200-ścian	2,80
kopuła 3528-ścian	3,50
kopuła 3872-ścian	3,60
kopuła 4232-ścian	3,90
kopuła 4608-ścian	3,50
kopuła 5000-ścian	3,50
kopuła 5408-ścian	3,30



Rys. 6. Rozkład wielkości przemieszczeń węzłów dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji obciążeń dla przykładowej kopuły utworzonej z 4608-ścianu

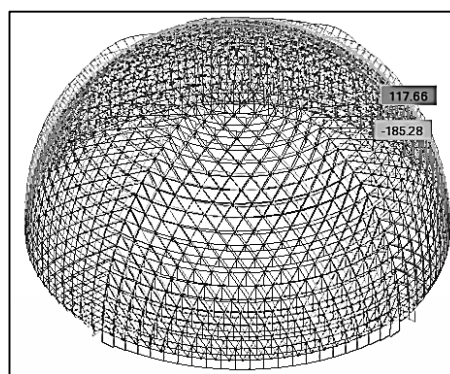
Fig. 6. Distribution of the displacements' values of nodes for the most unfavourable case of the load combination in the exemplary bars' dome shaped from 4608-hedron

W zaprojektowanych strukturach oceniano również zależności ekstremalnych naprężeń w elementach konstrukcji od poszczególnych kombinacji obciążeń. Ekstremalne wartości naprężeń normalnych występują w przypadku kombinacji złożonej z obciążeń stałych, wiatru jako czynnika wiodącego oraz śniegu jako czynnika towarzyszącego (przypadek: KOMB1). W tabeli 4 zestawiono maksymalne naprężenia normalne dla wszystkich analizowanych kopuł. Na rysunku 7 zaprezentowano przykładową kopułę utworzoną z 4608-ścianu ze wskazaniem wartości naprężeń występujących we wszystkich prętach, dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji obciążeń.

Tabela 4. Naprężenia normalne dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji dla zaprojektowanych kopuł prętowych (KOMB1)

Table 4. The normal stresses for the most unfavourable case of the load combination for the designed bars' domes (KOMB1)

kopuła	S max [MN/m ²]	S min [MN/m ²]
kopuła 2888-ścian	91,11	-180,61
kopuła 3200-ścian	98,07	-186,76
kopuła 3528-ścian	113,33	-175,25
kopuła 3872-ścian	117,59	-188,20
kopuła 4232-ścian	127,54	-191,70
kopuła 4608-ścian	117,66	-185,28
kopuła 5000-ścian	121,61	-192,93
kopuła 5408-ścian	124,31	-189,22



Rys. 7. Rozkład naprężeń normalnych dla najbardziej niekorzystnego przypadku kombinacji dla przykładowej kopuły utworzonej z 4608-ścianu

Fig. 7. Distribution of the normal stresses for the most unfavourable case of the load combination in the exemplary bars' dome shaped from 4608-hedron

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono osiem prętowych kopuł geodezyjnych jako propozycje przekryć dużych powierzchni, tj. kompleksów handlowo-rozrywkowych, stadionów sportowych, magazynów, planetariów i innych, niewymagających wewnętrznych podparć, filarów, poprzecznych ścian. Oprócz opracowania algorytmu kształtowania konstrukcji o coraz to większym zagęszczeniu wyjściowego oczka prętami, podania podstawowych parametrów geometrycznych powstałych kopuł, przeprowadzono również analizę statyczną. Analizując geometryczny kształt zaprojektowanych przekryć można stwierdzić, że w kopułach o większym stopniu zagęszczenia prętami wyjściowego oczka, liczebność elementów o tych samych długościach jest zdecydowanie większa niż w przypadku kopuł o mniejszym zagęszczeniu wyjściowego oczka (np. 104 grupy prętów o różnych długościach dla kopuły utworzonej z 2888-ścianu vs. 99 grup prętów o różnych długościach dla kopuły utworzonej z 5408-ścianu). Poddanie statycznej analizie zaprojektowanych kopuł prętowych miało na celu przedstawienie

sposobu zachowania się tego rodzaju geodezyjnych kopuł prętowych pod wpływem działania różnych kombinacji obciążeń. Przedstawione w artykule zaprojektowane rozwiązania konstrukcyjne w postaci jednowarstwowych geodezyjnych kopuł prętowych mogą stanowić propozycje wyboru odpowiedniej struktury dla projektanta czy konstruktora.

Literatura

- [1] Bródka J. i inni.: Przekrycia strukturalne. Arkady, Warszawa 1985.
- [2] Praca zbiorowa pod redakcją W. Boguckiego: Hale o dużych rozpiętościach. *Poradnik projektanta konstrukcji metalowych*. (1st ed., Vol. 2). Warszawa: Arkady 1982.
- [3] GeodesicDome, Pub. L. No. US2682235 A (1954).
<http://www.google.com/patents/US2682235?hl=pl&dq=2682235>.
- [4] Rębielak J., Mikołajewski J.: Analiza statyczna sferycznej formy struktury VA(TH)NO₂, *Czasopismo Techniczne*, 2011r. str.309-315.
- [5] Tarnai, T. (1974). Spherical Grids of Triangular Network. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 76, 307–338.

GEODESIC BARS' DOMES – PROPOSITIONS OF LARGE AREA COVERING

Summary

The article presents the proposals of the large areas coverings as the designed eight one-layered geodesic domes. The domes were shaped using the elaborated by Fuller procedures of the sphere division into spherical triangles. Using proposed by Fuller methods of the regular icosahedron division, eight completely new one-layered bars' domes were designed, whose initial polyhedron was the regular octahedron. The developed domes, with the diameter 50m, have different compaction of bars. The basic geometric parameters of generated constructions were compared and presented. They were dimensioned, in accordance with the standard requirements, choosing for each group of bars the cross sections of round pipes. The designed geodesic bars' domes were subjected into fixed and variable impacts, creating different combinations of loads. The detailed static analysis was also performed. The dependencies of occurring axial forces, displacements of nodes, as well as normal stresses occurring in the bars of the adopted combinations of loads were analysed and evaluated. The results for the most unfavourable cases of the load combination were tabulated and presented in the figures. The presented in the article geodesic bars' domes may constitute the original dome coverings of the large areas. The bars' grids stretched on the sphere may ensure the geometric immutability of the structure, characterize the low sensitivity to nodes jumps, as well as have the optimal technological and economical properties, which consist of a minimum number of different elements and consume little amount of material (eg. steel).

Keywords: spatial construction system, geometric bars' shaping, topology of the construction, static analysis

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/rb.2016.53