

Mykhaylo DELYAVSKYY¹
Adam GRABOWSKI²
Aleksandra NIESPODZIANA³
Maria OLEJNICZAK⁴

METODA ROZWIĄZYWANIA ORTOTROPOWEGO WARSTWOWEGO PASMA PŁYTOWEGO

Rozważa się belkę wielowarstwową wyciętą z pasma płytowego złożonego z grubych warstw ortotropowych i znajdującego się w warunkach zginania walcowego. Na powierzchni górnej belka poddana jest działaniu obciążenia dowolnie rozłożonego wzdłuż jej długości. Dolna powierzchnia jest nieobciążona. Opracowano model matematyczny, w którym rozpatrywana belka znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. Model opisuje się układem dwóch sprzężonych równań różniczkowych sformułowanych w pochodnych cząstkowych. Rozwiązanie tego układu wybiera się w postaci sumy iloczynów nieznanych funkcji jednej zmiennej i funkcji trygonometrycznych innej zmiennej. Naprężenia i przemieszczenia w płycie wyraża się przez odpowiednie funkcje kształtu pomnożone przez nieznane parametry modelu za pomocą których spełnia się warunki powierzchniowe, brzegowe i warunki ciągłości na powierzchniach podziału warstw. Jako przykład rozważa się belkę trójwarstwową swobodnie podpartą na końcach i obciążoną siłą skupioną przyłożoną w środku rozpiętości powierzchni górnej. Otrzymane rozwiązanie z dużą dokładnością spełnia wszystkie warunki nałożone na rozpatrywany układ.

Słowa kluczowe: pasmo płytowe, płyta ortotropowa, belka warstwowa, metoda analityczna

1. Wstęp

Ocena nośności wielowarstwowych konstrukcji płytowych wymaga stworzenia nowych modeli i opracowania metod ich rozwiązania. W niniejszej pracy zaproponowano metodę rozwiązywania wielowarstwowego pasma płytowego

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Mykhaylo Delyavskyy, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Al. Prof. Sylwestra Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, tel. 523408619, e-mail: delyavmv@utp.edu.pl

² Adam Grabowski, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Al. Prof. Sylwestra Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, tel. 523408411, e-mail: adamgrab@utp.edu.pl

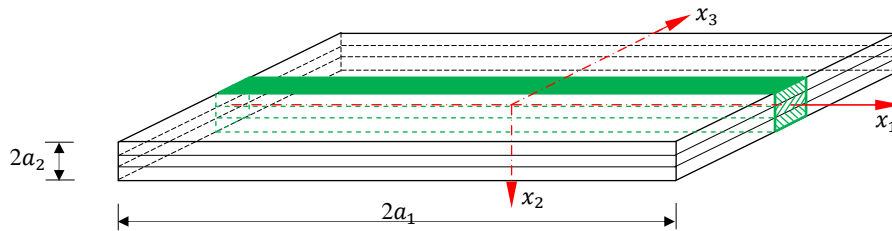
³ Aleksandra Niespodziana, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Al. Prof. Sylwestra Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, tel. 523408411, e-mail: olan@utp.edu.pl

⁴ Maria Olejniczak, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Al. Prof. Sylwestra Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, tel. 523408411, e-mail: mariaio@utp.edu.pl

znajdującego się w warunkach zginania walcowego i złożonego z grubych warstw ortotropowych. Rozwiązanie pasma sprowadza się do rozwiązania belki wyciętej z niego w kierunku poprzecznym i znajdującej się w warunkach płaskiego stanu odkształcenia [1,3].

2. Sformułowanie problemu

Rysunek 1 przedstawia wielowarstwowe pasmo płytowe nieskończenie długie w kierunku osi x_3 , z którego wycięto belkę o długości $2a_1$ i grubości $2a_2$. Przyjmuje się jednostkową szerokość tej belki. Początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem geometrycznym belki. Orientację osi przedstawiono na rys.1. Belka znajduje się w płaskim stanie odkształcenia: $\varepsilon_{3j} = 0$ ($j=1,2,3$). Warunki brzegowe i obciążenie zewnętrzne w kierunku osi x_3 są jednorodne. Przy takich założeniach trójwymiarowe zagadnienie teorii sprężystości dla ortotropowego, wielowarstwowego pasma płytowego sprowadza się do rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego.



Rys. 1. Pasma wielowarstwowe

Fig. 1. Multilayered strip

Przyjmuje się, że obciążenie przyłożone prostopadle do powierzchni górnej pasma może być zmienne w kierunku osi x_1 i stałe w czasie. Powierzchnia dolna pasma jest nieobciążona.

3. Metoda rozwiązania zagadnienia

Rozważa się wielowarstwową belkę złożoną z grubych warstw ortotropowych o różnych grubościach i różnych właściwościach mechanicznych. Oznacza się grubość belki przez $2H = 2a_2$, a grubość każdej oddzielnej warstwy przez $2a_2^{(k)}$, gdzie k oznacza numer warstwy. Funkcje odkształceń ε_{ij} , przemieszczeń u_i oraz naprężeń σ_{ij} są ciągłe i odpowiednio różniczkowalne.

Przyjmuje się, że w każdej warstwie belki spełnione są równania geometryczne:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}), \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

równania fizyczne:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \beta_{ijmn}^{(k)} \varepsilon_{mn}^{(k)}, \quad i, j, m, n = 1, 2 \quad (2)$$

oraz równania statyczne:

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + \rho f_i^{(k)} = 0 \quad (3)$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, $f_i^{(k)}$ składowymi sił masowych, $\beta_{ijmn}^{(k)}$ są składowymi tensora stałych sprężystości materiału k -tej warstwy belki określonymi dla płaskiego stanu odkształcenia i wyrażone są przez odpowiednie sztywności ciała trójwymiarowego $b_{ijmn}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \beta_{1111}^{(k)} &= \frac{b_{1111}^{(k)} b_{2222}^{(k)} - b_{1122}^{(k)^2}}{b_{2222}^{(k)}} \\ \beta_{1133}^{(k)} &= \beta_{3311}^{(k)} = \frac{b_{1133}^{(k)} b_{2222}^{(k)} - b_{1122}^{(k)} b_{2233}^{(k)}}{b_{2222}^{(k)}} \\ \beta_{3333}^{(k)} &= \frac{b_{3333}^{(k)} b_{2222}^{(k)} - b_{3322}^{(k)} b_{2222}^{(k)}}{b_{2222}^{(k)}}, \quad \beta_{1313}^{(k)} = b_{1313}^{(k)} \end{aligned} \quad (4)$$

Układ równań (1)-(3) uzupełniony jest odpowiednimi warunkami brzegowymi. W dalszych rozważaniach pomijany jest wpływ sił masowych. Równania (1)-(3) mogą być sprowadzone do dwóch przemieszczeniowych równań równowagi [2,4]:

$$\begin{aligned} \beta_{1111}^{(k)} u_{1,11}^{(k)} + (\beta_{1122}^{(k)} + b_{1212}^{(k)}) u_{2,12}^{(k)} + \beta_{1212}^{(k)} u_{1,22}^{(k)} &= 0, \\ \beta_{2222}^{(k)} u_{2,22}^{(k)} + (\beta_{1122}^{(k)} + \beta_{1212}^{(k)}) u_{1,12}^{(k)} + \beta_{1212}^{(k)} u_{2,11}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

w których: $u_j^{(k)}$ są składowymi wektora przemieszczeń k -tej warstwy. Rozwiązanie wielowarstwowej belki sprowadza się do rozwiązania równań równowagi (5) dla każdej wyodrębnionej warstwy. Przyjęto, że nie ma poślizgu na połączeniu warstw, a więc muszą być spełnione warunki ciągłości na powierzchniach kontaktu warstw oraz warunki brzegowe na końcach belki i warunki statyczne na powierzchniach zewnętrznych.

Równania (5) rozwiązuje się metodą rozdzielania zmiennych. W tym celu zadaje się w k -tej warstwie pasma dwuwymiarowe pole przemieszczeń $\{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\}$ [5,6]:

$$\begin{aligned}
u_1^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{2(m)}^{[1](k)}(x_1) \cos(\delta_{(m)}^{[2](k)} x_2) + f_{1(m)}^{[1](k)}(x_1) \sin(\delta_{(m)}^{[2](k)} x_2) \right. \\
&\quad \left. + f_{2(m)}^{[2](k)}(x_2) \cos(\delta_{(m)}^{[1](k)} x_1) + f_{1(m)}^{[2](k)}(x_2) \sin(\delta_{(m)}^{[1](k)} x_1) \right\} \\
u_2^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{4(m)}^{[1](k)}(x_1) \cos(\delta_{(m)}^{[2](k)} x_2) + f_{3(m)}^{[1](k)}(x_1) \sin(\delta_{(m)}^{[2](k)} x_2) \right. \\
&\quad \left. + f_{4(m)}^{[2](k)}(x_2) \cos(\delta_{(m)}^{[1](k)} x_1) + f_{3(m)}^{[2](k)}(x_2) \sin(\delta_{(m)}^{[1](k)} x_1) \right\} \\
f_{p(m)}^{[j](k)}(x_j) &= R_{p(m)}^{[j](k)} \exp[\lambda_{(m)}^{[j](k)} x_j], \quad \delta_{(m)}^{[j2](k)} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_j^{(k)}}
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie: $R_{p(m)}^{[j](k)}$ są nieznanymi parametrami określonymi z warunków brzegowych, $p=1 \div 4$, $j=1 \div 2$. Podstawiając wyrażenia (6) i (7) do układu równań równowagi (5) otrzymuje się dwa równania charakterystyczne:

$$\begin{aligned}
&\left[\beta_{1111}^{(k)} (\lambda_{(m)}^{[1](k)})^2 - \beta_{1212}^{(k)} (\delta_{(m)}^{[2](k)})^2 \right] \left[\beta_{1212}^{(k)} (\lambda_{(m)}^{[1](k)})^2 - \beta_{2222}^{(k)} (\delta_{(m)}^{[2](k)})^2 \right] \\
&\quad + \left[\beta_{1122}^{(k)} + \beta_{1212}^{(k)} \right]^2 (\delta_{(m)}^{[2](k)})^2 (\lambda_{(m)}^{[1](k)})^2 = 0 \\
&\left[\beta_{1212}^{(k)} (\lambda_{(m)}^{[2](k)})^2 - \beta_{1111}^{(k)} (\delta_{(m)}^{[1](k)})^2 \right] \left[\beta_{2222}^{(k)} (\lambda_{(m)}^{[2](k)})^2 - \beta_{1212}^{(k)} (\delta_{(m)}^{[1](k)})^2 \right] \\
&\quad + \left[\beta_{1122}^{(k)} + \beta_{1212}^{(k)} \right]^2 (\delta_{(m)}^{[1](k)})^2 (\lambda_{(m)}^{[2](k)})^2 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

względem parametrów $\lambda_{(m)}^{[j](k)}$.

Ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych (5) przyjmuje więc postać:

$$f_{p(m)}^{[j](k)}(x_j) = \sum_{v=1}^4 R_{pv(m)}^{[j](k)} \exp[\lambda_{v(m)}^{[j](k)} x_j] \tag{9}$$

Gdzie: v jest numerem pierwiastka równań charakterystycznych (8).

Po określeniu pierwiastków $\lambda_{v(m)}^{[j](k)}$ układ równań (8) ma rozwiązania linowo zależne, wobec czego ze zbioru $\{R_{pv(m)}^{[j](k)}\}$ tylko dwie grupy współczynników będą niezależne. Jako niezależne wybieramy współczynniki $R_{1v(m)}^{[j](k)}$ i $R_{2v(m)}^{[j](k)}$, a następnie korzystając ze wzorów (6) określone zostają składowe wektora przemieszczeń k -tej warstwy belki:

$$u_1^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1v(m)}^{[1](k)} \left[U_{1v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[1](k)} \left[U_{2v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{1v(m)}^{[2](k)} \left[U_{1v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[2](k)} \left[U_{2v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$u_2^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1v(m)}^{[1](k)} \left[W_{1v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[1](k)} \left[W_{2v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{1v(m)}^{[2](k)} \left[W_{1v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[2](k)} \left[W_{2v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right\}$$

Wprowadzone funkcje $U_{pv(m)}^{[j](k)}(x_1, x_2)$ i $W_{pv(m)}^{[j](k)}(x_1, x_2)$, $p = (1, 2)$ w wyrażeniach (10) nazywa się funkcjami kształtu przemieszczeń.

Składowe tensora naprężeń określone są równań fizycznych (2):

$$\sigma_{11}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1v(m)}^{[1](k)} \left[X_{1v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{1v(m)}^{[2](k)} \left[X_{1v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{2v(m)}^{[1](k)} \left[X_{2v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{2v(m)}^{[2](k)} \left[X_{2v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right\}, \quad (11)$$

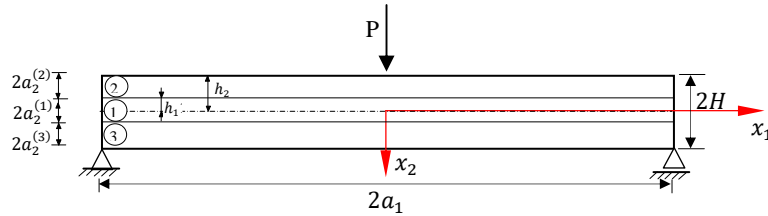
$$\sigma_{22}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1v(m)}^{[1](k)} \left[Y_{1v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{1v(m)}^{[2](k)} \left[Y_{1v(m)}^{[3](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{2v(m)}^{[1](k)} \left[Y_{2v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[2](k)} \left[Y_{2v(m)}^{[3](k)}(x_1, x_2) \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1v(m)}^{[1](k)} \left[Z_{1v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{1v(m)}^{[2](k)} \left[Z_{1v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right. \\ \left. + R_{2v(m)}^{[1](k)} \left[Z_{2v(m)}^{[1](k)}(x_1, x_2) \right] + R_{2v(m)}^{[2](k)} \left[Z_{2v(m)}^{[2](k)}(x_1, x_2) \right] \right\}$$

w których: $X_{pv(m)}^{[j](k)}(x_1, x_2)$, $Y_{pv(m)}^{[j](k)}(x_1, x_2)$, $Z_{pv(m)}^{[j](k)}(x_1, x_2)$ są funkcjami kształtu naprężeń.

4. Przykład

Rozpatrzono pasmo trójwarstwowe ($k=3$) swobodnie podparte na końcach i symetryczne względem płaszczyzny środkowej [6]. Wprowadzone oznaczenia



Rys. 2. Belka trójwarstwowa obciążona siłą skupioną w środku rozpiętości

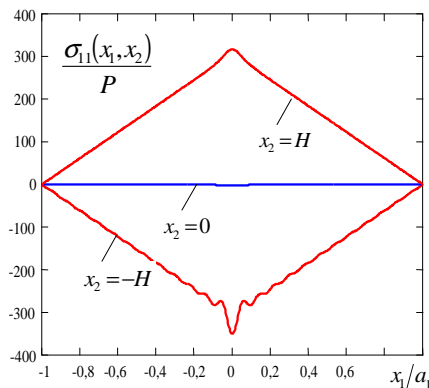
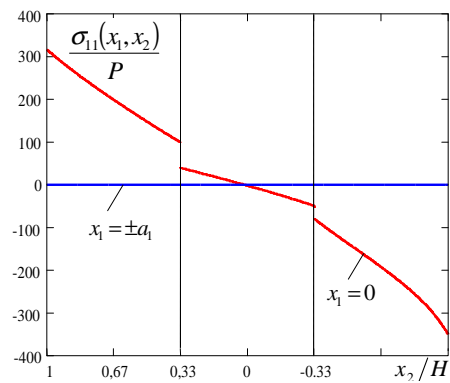
Fig. 2. Threelayered beam loaded with central concentrated force

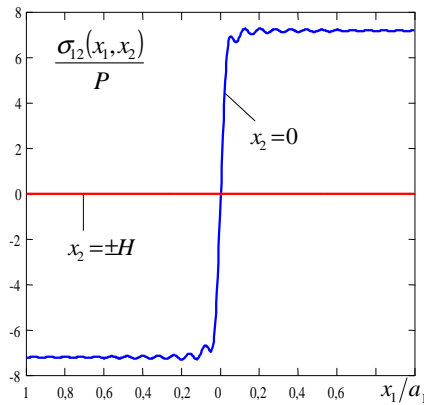
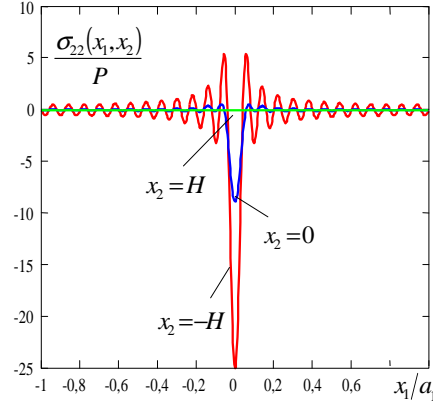
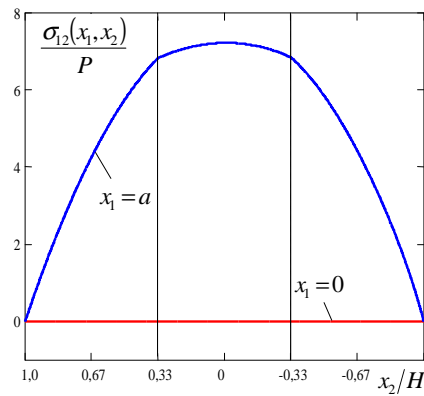
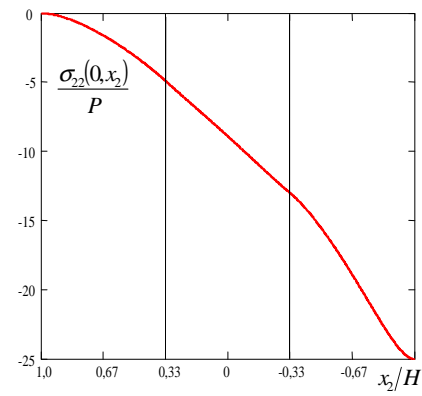
poszczególnych warstw przedstawiono na rys.2 (1- warstwa środkowa, 2- warstwa górna, 3- warstwa dolna). Obliczenia przeprowadzono dla przypadku, gdy grubości poszczególnych warstw są równe i wynoszą $2a_2^{(k)} = \frac{1}{3}H$ oraz przyjmując następujące parametry materiałowe:

- dla warstw zewnętrznych moduły Younga w kierunkach osi x_1, x_2 : $E_1^{(2)} = E_1^{(3)} = 5,7 \cdot 10^{10} [Pa]$, $E_2^{(2)} = E_2^{(3)} = 1,4 \cdot 10^{10} [Pa]$, moduły Kirchhoffa $G_{12}^{(2)} = G_{12}^{(3)} = 5,7 \cdot 10^{10} [Pa]$, współczynniki Poissona $\nu_{12}^{(2)} = \nu_{12}^{(3)} = 0,068$,
- dla środkowej warstwy odpowiednio: $E_1^{(1)} = 3,68 \cdot 10^{10} [Pa]$, $E_2^{(1)} = 1,90 \cdot 10^{10} [Pa]$, $G_{12}^{(1)} = 0,45 \cdot 10^{10} [Pa]$, $\nu_{12}^{(1)} = 0,405$.

Na rysunkach przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych i stycznych w różnych przekrojach belki. Wykresy sporządzono we współrzędnych względnych.

Na rys.3 podano zmianę po długości belki naprężeń σ_{11} w płaszczyźnie środkowej oraz na powierzchniach zewnętrznych. Na końcach belki naprężenia są zerowe, co świadczy o ścisłym spełnieniu warunków brzegowych. Rozkład tych naprężeń po grubości belki przedstawia rys. 4. Na powierzchniach podziału warstw wykres naprężeń jest nieciągły.

Rys. 3. Funkcja $\frac{\sigma_{11}}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Fig. 3. Function $\frac{\sigma_{11}}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Rys. 4. Funkcja $\frac{\sigma_{11}}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$ Fig. 4. Function $\frac{\sigma_{11}}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$

Rys. 5. Funkcja $\frac{\sigma_{12}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Fig. 5. Function $\frac{\sigma_{12}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Rys. 6. Funkcja $\frac{\sigma_{22}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Fig. 6. Function $\frac{\sigma_{22}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_1}{a_1} \right)$ Rys. 7. Funkcja $\frac{\sigma_{12}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$ Fig. 7. Function $\frac{\sigma_{12}(x_1, x_2)}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$ Rys. 8. Funkcja $\frac{\sigma_{22}(0, x_2)}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$ Fig. 8. Function $\frac{\sigma_{22}(0, x_2)}{P} \left(\frac{x_2}{H} \right)$

Naprężenia σ_{22} ściśle spełniają warunki statyczne na powierzchni dolnej belki (rys.5), natomiast w miejscu przyłożenia siły skupionej są bardzo duże, teoretycznie nieskończone. Naprężenia poprzeczne σ_{12} są zerowe na powierzchniach zewnętrznych belki i zmieniają się skokowo w przekroju pod siłą skupioną.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono model matematyczny i opracowano metodę rozwiązywania płyt wielowarstwowych złożonych z grubych warstw ortotropowych. Przyjęto, że płyta znajduje się w płaskim stanie odkształcenia. W ramach

modelu otrzymano ściśle rozwiązanie pasma trójwarstwowego. Opracowana metoda jest alternatywna do stosowanych metod numerycznych.

Literatura

- [1] Beregova N., Delyavsky M., Nagórko W., Zeliński J.: Modelowanie grubych płyt warstwowo ortotropowych, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, 18, Gliwice, 2003, s. 40-45.
- [2] Delyavsky M., Krawczuk M., Nagórko W., Podhorecki A.: Pure bending of orthotropic elastic rectangle beam, Engineering Transactions, 50, 1-2, 2002, s. 55-67.
- [3] Delyavskyy M., Rosiński K.: Modelowanie płyty grubej złożonej z trzech różnych warstw drewnianych, Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych, 9, Szczecin, 2011, s. 19-33.
- [4] Gołaś J., Podhorecka A., Delyavskyy M., Kravchuk M.: On the approach to the solution of bending problem for laminated plates, Mechanics of Composite Materials, 38, 3, 2002, s. 253-262.
- [5] Olejniczak M., Delyavskyy M., Krawczuk M.: Analiza zginania ortotropowego pasma płytowego, Konferencja naukowo-techniczna „Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno - wilgotnościowe w budownictwie, Bydgoszcz, 2000, s. 81-89.
- [6] Podhorecki A., Delyavskyy M., Olejniczak M.: Rozwiązywanie warstwowego pasma płytowego, Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych, Szczecin – Międzyzdroje, 2004, s. 103-116.

METHOD OF SOLUTION OF ORTHOTROPIC LAYERED STRIP PLATE

Summary

Strip cut from infinite long plate compounded with thick orthotropic layers is considered in this paper. The strip is in cylindrical bending conditions and it is load by transversal loading arbitrary distributed on its upper surface while its low surface is unloaded. The mathematical model of such strip as multilayered beam working in plane strain state is worked. The model is described with two system of differential equations in particular derivatives. The solution of this system has been taken in form of products of unknown function depending on some variable and trigonometrical function depending on other one. Stresses and displacements in the plate are expressed over corresponding functions of form multiplied by unknown parameters of the model. Using these parameters the boundary conditions are performed at the outer surfaces of the strip, at its edges and in multilayered surfaces. As an example, the three layered free supported beam loaded with concentrated force applied in the center of its length is considered. The obtained solution satisfy all conditions applied on considered system with high accuracy.

Keywords: band plate, orthotropic plate, layered beam, analytical method

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/rb.2016.46