

Zbigniew STACHURA¹

OCENA ZWICHRZENIA SPRĘŻYSTEGO NA PODSTAWIE INTERAKCJI SYMETRYCZNYCH I ANTYSYMETRYCZNYCH STANÓW OBCIĄŻENIA

Przedstawiono zagadnienie sprężystej utraty płaskiej postaci zginania stalowych belek o przekrojach dwuteowych bisymetrycznych, które są poddane jednokierunkowemu zginaniu względem osi większej bezwładności. Zaproponowano alternatywny w stosunku do konwencjonalnego sposób wyznaczenia wartości sprężystego momentu krytycznego zwiczenia, przy dowolnym rozkładzie momentu zginającego wzdłuż osi pręta, bazujący na interakcji symetrycznej i antysymetrycznej postaci zwiczenia. Zaproponowane podejście analityczne porównano z wynikami analiz numerycznych MES, na przykładzie swobodnie podpartej belki zginanej dwoma momentami podporowymi o różnym znaku i wartości oraz siłą skupioną w połowie rozpiętości belki.

Słowa kluczowe: dwuteownik stalowy, belka, zwiczenie, LBA

1. Wprowadzenie

Właściwa ocena zagadnienia zwiczenia stalowych belek o przekrojach dwuteowych bisymetrycznych jest bardzo istotna w projektowaniu zginanych elementów konstrukcji. Zarówno w literaturze zagranicznej jak i krajowej, m.in. [1-6] oraz wielu innych, można znaleźć wzory na moment krytyczny belki zginanej w postaci zarówno rozwiązań ścisłych jak i przybliżonych. Dotychczasowe, konwencjonalne propozycje rozwiązań przybliżonych, w przypadku belek z obciążeniem wywołującym zginanie o zmiennej wartości na długości pręta, bazują na zastosowaniu współczynników równoważnego stałego momentu, jako mnożnika do momentu krytycznego określonego przy założeniu pierwszej, symetrycznej postaci zwiczenia. Założenie to przyjmuje się również w przypadku, gdy belka zginana jest obciążeniem o charakterze antysymetrycznym, któremu w praktyce towarzyszy pierwsza postać zwiczenia będąca postacią antysymetryczną.

¹ Zbigniew Stachura, Politechnika Warszawska, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, tel.: +48 22 234 6261, z.stachura@il.pw.edu.pl

W pracy [2] zaproponowano alternatywny sposób oszacowania sprężystego momentu krytycznego zwichrzenia belki na podstawie interakcji symetrycznego i antysymetrycznego składnika momentu krytycznego. Rozpatrzono przypadek obciążenia momentów skupionych o różnej wartości, przyłożonych na końcach pręta. W niniejszym opracowaniu, zaproponowany w [2] sposób oszacowania momentu krytycznego uogólniono na przypadki dowolnego rozkładu wykresu momentu zginającego wzdłuż pręta. Na wybranym przykładzie obciążenia belki, zaproponowane podejście analityczne porównano z wynikami analiz numerycznych wykonanych przy użyciu programu LTBeamN [www.cticm.com].

2. Sformułowanie analityczne dotyczące wyznaczenia wartości sprężystego momentu krytycznego zwichrzenia

Sprężysty moment krytyczny zwichrzenia w odniesieniu do belki o przekroju dwuteowym bisymetrycznym, podpartej widelkowo i obciążonej w środku ścinania, można na podstawie rozwiązania liniowej teorii stateczności (LBA) aproksymować jak następuje:

$$M_{cr} = C_1 i_C \sqrt{N_{cr,z} N_{cr,T}} \quad (1)$$

gdzie: $N_{cr,z}$, $N_{cr,T}$ – siły krytyczne przy sprężystym wyboczeniu względem osi głównej mniejszej bezwładności przekroju oraz przy wyboczeniu skrętnym:

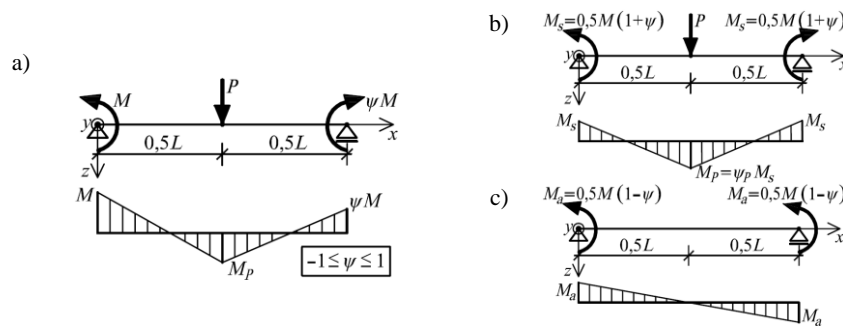
$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2}, \quad N_{cr,T} = \frac{1}{i_C^2} \left\{ GI_T + \frac{\pi^2 EI_w}{(k_w L)^2} \right\}, \quad i_C^2 = \frac{I_y + I_z}{A} \quad (2a,b,c)$$

k_z , k_w – współczynniki długości wyboczeniowej zależne od warunków podparcia przekrojów końcowych pręta. Współczynnik k_z jest związany z warunkami brzegowymi dotyczącymi swobody obrotu przekrojów końcowych względem osi głównej z-z, zaś współczynnik k_w odnosi się do warunków brzegowych dotyczących deplanacji przekrojów końcowych przy skręcaniu skrępowanym względem podłużnej osi elementu x-x. Współczynniki k_z i k_w przyjmują wartość pomiędzy 0,5 (przy zablokowanych stopniach swobody) a 1,0 (przy pełnej swobodzie obrotu i deplanacji) oraz 0,7 w przypadku gdy na jednym końcu pręta są zablokowane deformacje, a na drugim końcu jest pełna swoboda deformacji. W praktyce inżynierskiej powyższe współczynniki najczęściej przyjmuje się po bezpiecznej stronie o wartościach równych $k_z = k_w = 1,0$,

C_1 – współczynnik równoważnego stałego momentu zależny od obciążenia oraz od współczynników k_z i k_w . Wzory na współczynnik C_1 dla większości typowych przypadków obciążenia można znaleźć w literaturze, m.in. [1,3-6].

Pozostałe oznaczenia przyjęto zgodnie z [3].

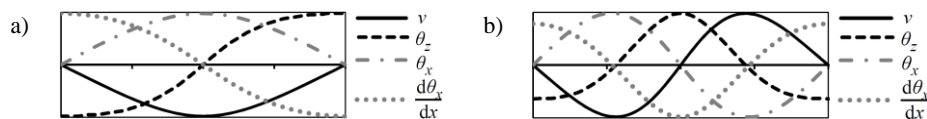
Przedstawiony w pracy [2] alternatywny sposób oszacowania sprężystego momentu krytycznego zwichrzenia, bazującego na interakcji symetrycznego i antysymetrycznego składnika momentu krytycznego odniesiono do przypadku obciążenia zginającymi momentami skupionymi na końcach pręta. Podejście przyjęte w pracy [2] można uogólnić do dowolnego schematu obciążenia. Na rys. 1 przedstawiono przykład analizowany w ramach niniejszej pracy.



Rys. 1. Rozpatrywany w pracy przykład belki zginanej: a) schemat statyczny, obciążenie i wykres momentu zginającego, b) część symetryczna obciążenia i momentu zginającego, c) część antysymetryczna obciążenia i momentu zginającego

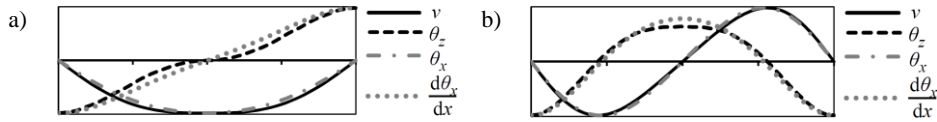
Fig. 1. Example of beam considered in this paper: a) static scheme, loading and bending moment diagram, b) symmetric part of the loading and bending moment diagram, c) anti-symmetric part of the loading and bending moment diagram

Na rys. 2-4 przedstawiono otrzymane na podstawie wyników z programu LTBeamN przebiegi osi odkształconych (v – przemieszczenia zgodnego z osią y , $\theta_z = dv/dx$ – miary kąta obrotu wokół osi z , θ_x – kąta skręcenia pręta, $d\theta_x/dx$ – miary deplanacji przekroju pręta) przy dwóch pierwszych postaciach zwichrzenia w odniesieniu do wybranych obciążeń symetrycznych i antysymetrycznych. W przypadku obciążenia symetrycznego momentami skupionymi na końcach pręta ($\psi = \psi_P = 1$) dwie pierwsze postaci zwichrzenia mają podobny przebieg jak pokazane na rys. 2. Współczynniki długości wybojeniowych wynikających z postaci zwichrzenia zestawiono w tabl. 1. Współczynniki równowaznego momentu odniesione do dwóch pierwszych postaci zwichrzenia dla wybranych szczególnych przypadków obciążenia przedstawiono w tabl. 2.



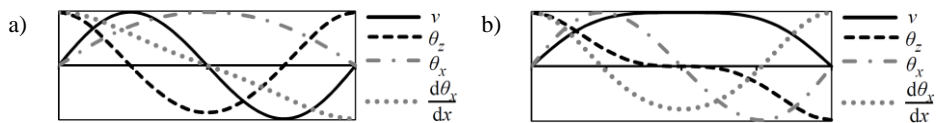
Rys. 2. Postacie wybożenia przy symetrycznym rozkładzie momentu i schemacie obciążenia nr 2 wg tabeli 2: a) pierwsza, b) druga

Fig. 2. Buckling modes for the symmetric bending moment diagram and No. 2 type of load according to the table 2: a) the first, b) the second



Rys. 3. Postacie wyboczenia przy symetrycznym rozkładzie momentu i schemacie obciążenia nr 3 wg tabeli 2: a) pierwsza, b) druga

Fig. 3. Buckling modes for the symmetric bending moment diagram and No. 3 type of load according to the table 2: a) the first, b) the second



Rys. 4. Postacie wyboczenia przy antysymetrycznym rozkładzie momentu: a) pierwsza, b) druga

Fig. 4. Buckling modes for the anti-symmetric bending moment diagram: a) the first, b) the second

Tabela 1. Współczynniki długości wyboczeniowej związane z postaciami wyboczenia przedstawionymi na rys. 2-4

Table 1. Buckling length factors corresponding to buckling modes of Figs. 2-4

Nr postaci zwichrzenia	Współczynniki długości wyboczeniowej w odniesieniu do rozkładu wykresu momentu zginającego			
	Wykres symetryczny		Wykres antysymetryczny	
	$k_z = L_{cr,z} / L$	$k_w = L_{cr,w} / L$	$k_z = L_{cr,z} / L$	$k_w = L_{cr,w} / L$
Pierwsza	$k_{zs} = 1,0$	$k_{ws} = 1,0$	$k_{za} = 0,5$	$k_{wa} = 1,0$
Druga	$k_{za} = 0,5$	$k_{wa} = 0,5$	$k_{zs} = 1,0$	$k_{wa} = 0,5$

Tabela 2. Współczynnik C_1 w odniesieniu do wybranych rozkładów momentów

Table 2. Coefficients C_1 for particular type of bending moment diagrams

Nr	Schemat obciążenia	Wykres momentu zginającego	Współczynnik C_1	
			Pierwsza postać zwichrzenia	Druga postać zwichrzenia
1			$C_{1,s} = 1,00$	$C_{1,sa} = 1,00$
2			$C_{1,s} = 1,35$	$C_{1,sa} = 1,82$
3			$C_{1,s} = 2,64$	$C_{1,sa} = 1,82$
4			$C_{1,a} = 1,32$	$C_{1,as} = 3,62$

Należy zwrócić uwagę, że wartości współczynników długości wyboczeniowych przy antysymetrycznych układach obciążeń innych niż przedstawionych na rys. 1 mogą się różnić od przedstawionych w tabl. 1. Zagadnienia te będą przedmiotem przyszłych badań.

Znając rozwiązania elementarnych przypadków zwiczerzenia przy symetrycznym i antysymetrycznym układzie obciążeń, sprężysty moment krytyczny zwiczerzenia przy dowolnym układzie obciążeń zginających belkę można aproksymować w postaci:

$$\frac{M_{\max}}{M_{cr}} = \frac{M_{s,\max}}{M_{cr,s}} + \eta \frac{M_{a,\max}}{M_{cr,a}} \rightarrow M_{cr} = \frac{1}{\frac{1}{M_{cr,s}} \frac{M_{s,\max}}{M_{\max}} + \eta \frac{1}{M_{cr,a}} \frac{M_{a,\max}}{M_{\max}}} \quad (3)$$

gdzie: M_{\max} – maksymalna bezwzględna wartość z wykresu momentu zginającego w belce,

$M_{s,\max}$, $M_{a,\max}$ – maksymalna bezwzględna wartość momentu zginającego, odpowiednio w części symetrycznej i antysymetrycznej wykresu momentów,

η – funkcja interakcji części symetrycznej i antysymetrycznej momentu krytycznego, zależna od schematu obciążenia,

$M_{cr,s}$, $M_{cr,a}$ – sprężysty moment krytyczny zwiczerzenia odpowiednio przy obciążeniu symetrycznym i antysymetrycznym. W przypadku obciążenia przyłożonego w środku ścinania i pierwszej postaci zwiczerzenia:

$$M_{cr,s} = C_{1,s} i_C \sqrt{N_{cr,zs} N_{cr,ts}} \quad , \quad M_{cr,a} = C_{1,a} i_C \sqrt{N_{cr,za} N_{cr,ta}} \quad (4a,b)$$

gdzie: $N_{cr,zs}$, $N_{cr,ts}$ – wg (2a,b) po przyjęciu $k_z = k_{zs} = 1,0$ oraz $k_w = k_{ws} = 1,0$,

$N_{cr,za}$, $N_{cr,ta}$ – wg (2a,b) po przyjęciu $k_z = k_{za} = 0,5$ oraz $k_w = k_{ws} = 1,0$,

$C_{1,s}$, $C_{1,a}$ – współczynnik równoważnego momentu odpowiednio przy symetrycznym i antysymetrycznym wykresie momentów zginających przyjmowany zgodnie z tabl. 2. W przypadku symetrycznego schematu obciążeń, innego od wymienionych w tabl. 2 współczynnik $C_{1,s}$ zaleca się wyznaczać ze wzoru Bijaka [1], który w wielu przypadkach obciążenia lepiej przybliży $M_{cr,s}$ do rozwiązania otrzymanego z MES w porównaniu do analogicznych propozycji podanych w pracach [5,6]:

$$C_{1,s} = \sqrt{\frac{21M_{\max}^2}{M_{\max}^2 + 6M_2^2 + 8M_3^2 + 6M_4^2}} \quad (5)$$

gdzie: M_2 , M_3 , M_4 – momenty zginające odpowiednio w 1/4, 1/2 oraz 1/3 rozpiętości belki.

W przypadku schematu obciążenia przyjętego na rys. 1 i siły P przyłożonej do środka ścinania przekroju (w wypadku przekroju bisymetrycznego pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju), funkcję interakcji części symetrycznej i antysymetrycznej momentu krytycznego η można przyjąć w postaci:

– gdy $M_{s,\max} \geq M_{a,\max}$:

$$\eta = \left(\frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \right)^n \quad (6a)$$

gdzie: $\alpha = 1 - M_{a,\max} / M_{s,\max}$ oraz $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$n = 1 + |\psi_P| \leq 2,$$

ψ_P – współczynnik proporcji momentów przyjmowany zgodnie z rys. 1b,

– gdy $M_{s,\max} \leq M_{a,\max}$:

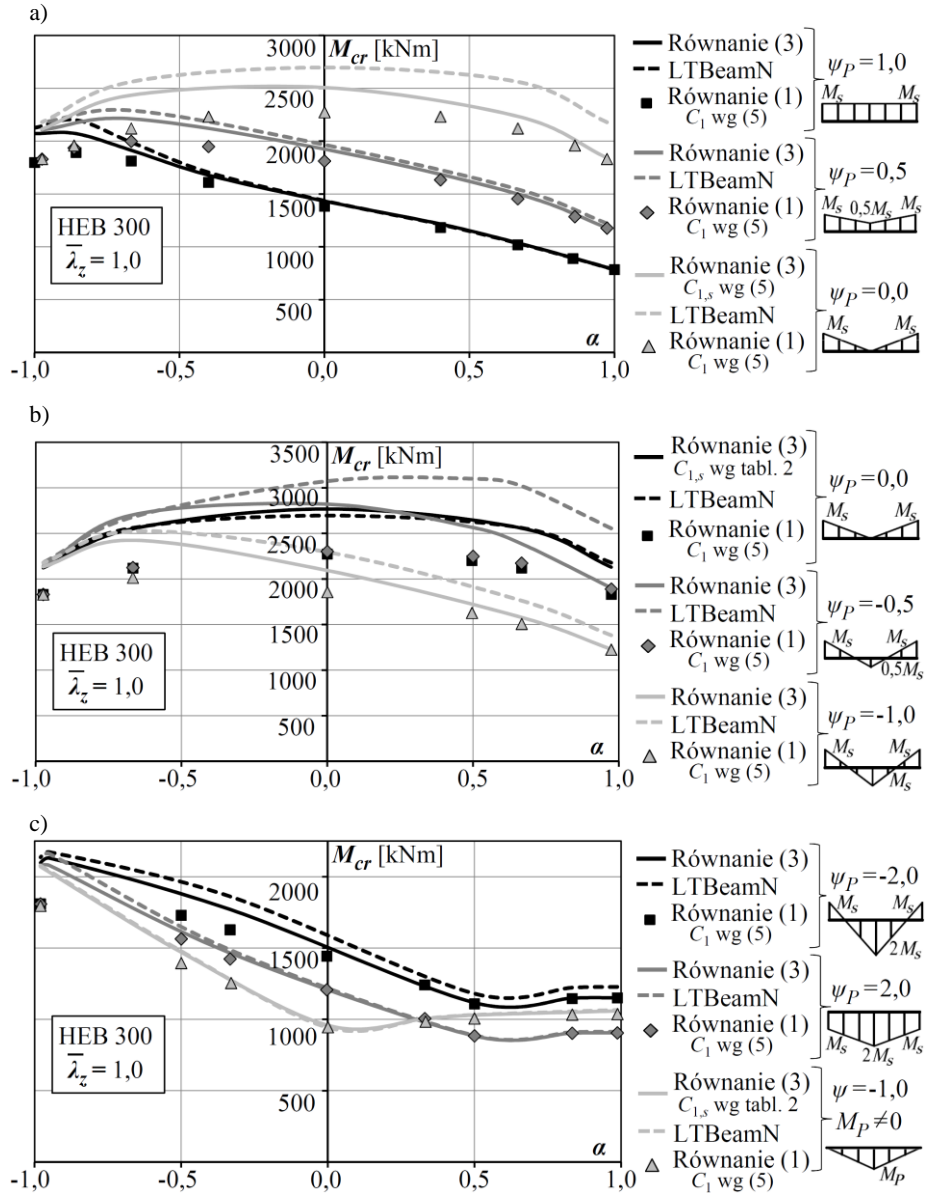
$$\eta = \left(\frac{1}{2 + \alpha} \right)^n \quad (6b)$$

gdzie: $\alpha = M_{s,\max} / M_{a,\max} - 1$ oraz $-1 \leq \alpha \leq 0$,

n – współczynnik tak jak we wzorze (6a).

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku analizowanego przykładu obciążenia (rys. 1), gdy parametr $\psi_P = 1,0$ (brak siły skupionej P), funkcje interakcji η wg (6a,b) stają się tożsame, a po przekształceniach można je wyrazić w postaci przedstawionej w pracy [2], tzn. $\eta = 0,25(1 - \psi)^2$, gdzie współczynnik ψ przyjmuje się zgodnie z rys. 1a.

Na podstawie analizowanego w pracy przykładu (rys. 1), na rys. 4 porównano zaproponowane podejście analityczne szacowania momentu krytycznego z wynikami analiz numerycznych wykonanych przy użyciu programu LTBeamN oraz z wynikami otrzymanymi z konwencjonalnego podejścia analitycznego ze wzoru (1), po przyjęciu współczynnika C_1 według (5). Z porównania wynika, że praktycznie w całym obszarze rozwiązań zaproponowana alternatywna metoda analityczna jest bliższa wynikom otrzymanym z MES niż podejście konwencjonalne. Wyniki otrzymane ze wzoru (1) są dużo bardziej konserwatywne niż te otrzymane z propozycji (3), szczególnie w odniesieniu do przypadków, gdy dominuje część antysymetryczna momentu zginającego (parametr $\alpha < 0$). Największe różnice w całym zakresie parametru α pomiędzy wartościami określonymi wg proponowanego podejścia analitycznego a wzorem konwencjonalnym stwierdzono w przypadkach, gdy parametr $\psi_P \in \langle -1,0; 0,0 \rangle$.



Rys. 5. Porównanie wartości M_{cr} w zależności od parametru α w odniesieniu do belki o wybranej smukłości względnej: a) w przypadku $\psi_P \in \langle 0,0; 1,0 \rangle$, b) w przypadku $\psi_P \in \langle -1,0; 0,0 \rangle$, c) w przypadkach $\psi_P < -1,0$, $\psi_P > 1,0$ oraz $\psi = -1,0$

Fig. 5. Comparison of results M_{cr} as a function of α for a given beam relative slenderness ratio: a) in case of $\psi_P \in \langle 0,0; 1,0 \rangle$, b) in case of $\psi_P \in \langle -1,0; 0,0 \rangle$, c) in cases of $\psi_P < -1,0$, $\psi_P > 1,0$ and $\psi = -1,0$

3. Podsumowanie

Przedstawiono opracowane w [2] podejście analityczne do wyznaczenia sprężystego momentu krytycznego zwichrzenia stalowych belek o dwuteowym przekroju bisymetrycznym, uogólniając je na przypadki dowolnego przebiegu momentu zginającego. Zaproponowane podejście analityczne porównano na wybranym przykładzie z wynikami symulacji MES i stwierdzono, że przybliża wyniki numeryczne w stopniu lepszym niż analityczne podejście konwencjonalne. W kolejnym etapie badań rozważane będą przypadki dotyczące innych rozkładów momentu zginającego i innych oddziaływań przeszłowych, w tym obciążeń przyłożonych poza środkiem ścinania przekroju.

Literatura

- [1] Bijak R.: Moment krytyczny zwichrzenia niestężonych bisymetrycznych belek dwuteowych podpartych widelkowo. ICMS 2011 Conference, Wrocław 2011.
- [2] Giżejowski M., Stachura Z., Uziak J.: Elastic flexural-torsional buckling of beams and beam-columns as a basis for stability design of members with discrete rigid restraints, Proceedings SEMC 2016 Conference, Cape Town 2016 (w druku).
- [3] PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [4] Rykaluk K.: Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2012.
- [5] Serna M.A., López A., Puente I., Yong D.J.: Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members, Journal of Constructional Steel Research, 62, 2006, s. 566-580.
- [6] Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L.: The behaviour and design of steel structures to EC3 (4th Edition), Taylor & Francis, London-New York 2008.

EVALUATION OF ELASTIC LATERAL-TORSIONAL BUCKLING BASED ON THE INTERACTION OF SYMMETRIC AND ANTI-SYMMETRIC LOADING CASES

Summary

This paper presents the elastic lateral-buckling instability problem of steel bi-symmetric I-section beams subjected to mono-axial bending about major principal axis. In reference to the beam under moment gradient, an alternative method for a direct determination of the elastic critical moment for lateral-torsional buckling, based on the superposition of the symmetric and anti-symmetric buckling modes has been introduced herein. The proposed analytical approach has been compared with the results of numerical simulations and demonstrated on the example of a simple supported beam subjected to bending under support moments and the span load applied at the shear centre of mid-length section of the beam.

Keywords: steel I-section, beam, lateral-torsional instability, LBA

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/rb.2016.43