

Roman BIJAK<sup>1</sup>  
Grzegorz KOŁODZIEJ<sup>2</sup>

## ZGINANIE I SKRĘCANIE BELEK O PRZĘKROJU MONO-SYMETRYCZNYM

W pracy przedstawiono metodę wymiarowania zginanych i skręcanych belek monosymetrycznych opracowaną na podstawie [1]. Uwzględnia ona teorię skręcania Własowa i wprowadza pojęcie bimomentu. Moment zginający względem osi słabszej analizowano w konfiguracji odkształconej [2]. W celu wyznaczenia kąta skręcenia przekroju skorzystano ze wzorów teorii Własowa, zawartych w pracy Rutckiego [3].

**Słowa kluczowe:** belka podsuwnicowa, bimoment, skręcanie, przekrój monosymetryczny

### 1. Wymiarowanie przekrojów monosymetrycznych

Celem tej pracy jest przedstawienie sposobu wymiarowania belek podsuwnicowych o przekroju monosymetrycznym (ogólne elementów dwukierunkowo zginanych i skręcanych). Posłużono się tylko darmowymi programami komputerowymi (LTBeam [4], PropSection [5]) oraz arkuszem kalkulacyjnym. Wpływ skręcania wg teorii Własowa uwzględniono za pomocą funkcji bimomentu. Sformułowanie dla przekrojów bisymetrycznych przedstawione w pracach [2], [6], otrzymujemy bezpośrednio ze wzorów dla przekrojów monosymetrycznych.

Interakcyjną formułę sprawdzenia nośności elementu zginanego i skręcanego możemy zapisać za pomocą wzoru (1) [1]:

$$\frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / \gamma_{M1}} + \frac{C_{mz} \bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rk} / \gamma_{M1}} + \frac{k_w k_{zw} k_{\alpha} B_{w,Ed}}{B_{w,Rk} / \gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (1)$$

gdzie:  $M_{y,Rk}$ ,  $M_{z,Rk}$  – nośności charakterystyczne przekroju poprzecznego przy

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Roman Bijak, dr inż., Politechnika Świętokrzyska, 25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, tel. 41 3424 577, e-mail: r.bijak@tu.kielce.pl

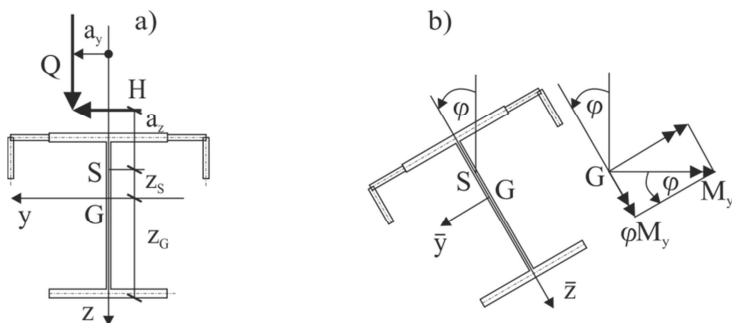
<sup>2</sup> Grzegorz Kołodziej, mgr inż., KYOTEC POLSKA sp. z o.o., 03-308 Warszawa, Batalionu Platerówek 3, e-mail: gsmk@poczta.onet.pl

zginaniu odpowiednio względem osi  $y$  i  $z$ ,  $\gamma_{M1}$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa,  $\chi_{LT}$  – współczynnik zwichrzenia,  $C_{mz}$  – współczynnik równoważnego stałego momentu [8].

Nośność przekroju ze względu na bimoment obliczamy ze wzoru (2):

$$B_{w,Rk} = W_w f_y \quad (2)$$

gdzie:  $W_w$  – wycinkowy wskaźnik wytrzymałości,  $f_y$  – granica plastyczności.



Rys. 1. a) Parametry geometryczne przekroju, b) konfiguracja przekroju poprzecznego po deformacji

Fig. 1. a) Geometric parameters of the section, b) deformed configuration of cross-section

Na skutek skręcenia przekroju o kąt  $\varphi$ , występuje dodatkowe zginanie przekroju względem osi  $z$  (rys. 1b) momentem  $\varphi M_y$ . Wartość obliczeniowa momentu zginającego  $M_{z,Ed}$  wynosi zatem [2]:

$$\bar{M}_{z,Ed} = M_{z,Ed} + \varphi_d M_{y,Ed} \quad (3)$$

gdzie:  $\varphi_d$  jest kątem skręcenia od obciążeń obliczeniowych.

Pozostałe parametry wyznaczamy ze wzorów (4 a,b,c) [1]:

$$k_w = 0,7 - 0,2 \frac{B_{w,Ed}}{B_{w,Rk}/\gamma_{M1}}, k_{zw} = 1 - \frac{\bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}}, k_\alpha = \frac{1}{1 - M_{y,Ed}/M_{cr}} \quad (4a,b,c)$$

Sprawdzenie nośności przekroju w zakresie sprężystym możemy zapisać za pomocą formuły interakcyjnej (5) [2]:

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}/\gamma_{M0}} + \frac{\bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M0}} + \frac{B_{w,Ed}}{B_{w,Rk}/\gamma_{M0}} \leq 1 \quad (5)$$

gdzie:  $\gamma_{M0}$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa.

Analogicznie jak w przypadku momentu zginającego siłę poziomą w konfiguracji po deformacji wyznaczamy ze wzoru (6) [2]:

$$\bar{H}_k = H_k + Q_k \varphi_k \quad (6)$$

gdzie:  $\varphi_k(x)$  – kąt skręcenia od obciążenia charakterystycznym momentem skręcającym  $T_k$ .

O wymiarach przekroju belki podsuwnicowej często decyduje ugięcie poziome belek podsuwnicowych [6]. Dla punktu  $\mathbf{P}$  o współrzędnej pionowej  $a_z$  możemy je oszacować za pomocą wzoru (7) (Rys. 1a):

$$w = \max_{0 \leq x \leq L} \left| \sum_{(i)} \{v_k(x) + a_z \varphi_k(x)\} \right| \leq L / 600 \quad (7)$$

gdzie: dolny indeks  $k$  oznacza wartości charakterystyczne  $i$ -tego obciążenia,  $\varphi_k(x)$  – kąt skręcenia wywołany momentem skręcającym  $T_k$ ,  $v_k(x)$  – przemieszczenie wywołane obciążeniem poziomym belki  $\bar{H}_k$  (por. Tablica 1).

## 2. Wymiarowanie dwuteowników bisymetrycznych wg [2, 6]

Przedstawione powyżej zależności można prosto przekształcić, uzyskując wzory przedstawione w pracach [2,6]. W tym celu zastąpimy bimoment parą przeciwnie skierowanych momentów zginających półki dwuteownika względem osi  $z$  (rys. 2a):

$$M_w(x) = \frac{B_w(x)}{h_0} \quad (8)$$

Nośność sprężysta półki dwuteownika przy zginaniu względem osi  $z$  wynosi:

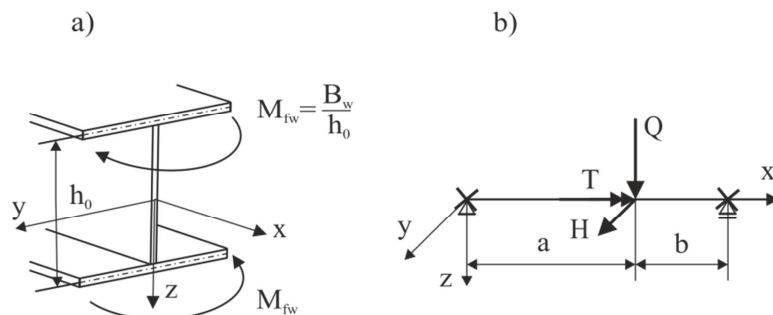
$$M_{w,Rk} = W_{fz} \cdot f_y \quad (9)$$

gdzie:  $W_{fz} = tb^2/6$  – sprężysty wskaźnik wytrzymałości półki dwuteownika względem osi  $z$  ( $t$ ,  $b$  – odpowiednio grubość i szerokość półki).

Zależność pomiędzy bimomentową nośnością przekroju a nośnością  $M_{w,Rk}$  pojedynczej półki przy zginaniu zastępczym momentem  $M_w$  przedstawmy w formie:

$$B_{w,Rk} = W_w \cdot f_y = \frac{I_w}{\omega_{max}} \cdot f_y = \frac{tb^3h_0^2/24}{bh_0/4} \cdot f_y = M_{w,Rk} h_0 \quad (10)$$

gdzie:  $I_w$  – wycinkowy moment bezwładności przekroju.



Rys. 2. a) Para momentów zginających pólkę równoważna bimomentowi, b) schemat statyczny obciążenia skupionego

Fig. 2. a) Bending moment couple, equivalent to bimoment, b) static diagram for concentrated load

Uwzględniając wzory (8,10) warunek nośności elementu dwukierunkowo zginanego i skręcanego dwuteownika bisymetrycznego możemy zapisać za pomocą przekształconego wzoru (1):

$$\frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}/\gamma_{M1}} + \frac{C_{mz} \bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}} + \frac{k_w k_{zw} k_{\alpha} M_{w,Ed}}{M_{w,Rk}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (11a)$$

$$k_w = 0,7 - 0,2 \frac{M_{w,Ed}}{M_{w,Rk}/\gamma_{M1}} \quad (11b)$$

We wzorach (11a, b) postawiamy plastyczne nośności przekroju przy zginaniu względem osi  $y$  i  $z$ , a nośność  $M_{w,Rk}$  wyznaczamy ze wzoru (9) podstawiając plastyczny wskaźnik wytrzymałości  $W_{fz} = tb^2/4$ . Nośność przekroju w zakresie plastycznym wyznaczamy na podstawie wzoru (12) [2]:

$$\left( \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}/\gamma_{M0}} \right)^2 + \frac{\bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M0}} + \frac{M_{w,Ed}}{M_{w,Rk}/\gamma_{M0}} \leq 1,0 \quad (12)$$

### 3. Wzory analityczne dla podparcia widelkowego

Wzory na rozkład sił przekrojowych wynikających z teorii Własowa przyjęto na podstawie książki Ruteckiego [3]. W Tabeli 1 przedstawiono funkcję przemieszczenia poziomego od obciążenia siłą skupioną  $H_k$  oraz funkcje kąta skręcenia  $\varphi(x)$ , bimomentu  $B_w(x)$  i momentu skręcającego St.Venanta.

Tabela 1. Funkcje przemieszczeń i sił przekrojowych od obciążenia skupionego (Rys. 2b)

Table 1. Analytic functions for displacements and internal forces in case of point load (Fig. 2b)

Lewy przedział ( $0 \leq x < a$ )	Prawy przedział ( $a < x \leq L$ )
$v(x) = \frac{\bar{H}_k b}{6EI_z} \frac{x}{L} (L^2 - b^2 - x^2)$	$v(\bar{x}) = \frac{\bar{H}_k a}{6EI_z} \frac{\bar{x}}{L} (L^2 - a^2 - \bar{x}^2)$
$\varphi(x) = \frac{T}{kGI_T} \left( \frac{b}{L} kx - \frac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)} \sinh(kx) \right)$	$\varphi(\bar{x}) = \frac{T}{kGI_T} \left[ \frac{a}{L} k\bar{x} - \frac{\sinh(ka)}{\sinh(kL)} \sinh(k\bar{x}) \right]$
$B_w(x) = EI_w \left( \frac{Tk}{GI_T} \right) \frac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)} \sinh(kx)$	$B_w(\bar{x}) = EI_w \left( \frac{Tk}{GI_T} \right) \frac{\sinh(ka)}{\sinh(kL)} \sinh(k\bar{x})$
$M_v(x) = T \left( \frac{b}{L} - \frac{\sinh(kb)}{\sinh(kL)} \cosh(kx) \right)$	$M_v(\bar{x}) = T \left( -\frac{a}{L} + \frac{\sinh(ka)}{\sinh(kL)} \cosh(k\bar{x}) \right)$

gdzie:  $\bar{x} = L - x$ ,  $k = \sqrt{GI_T / (EI_w)}$ ,  $I_T$  – moment bezwładności skręcania St. Venanta,  $E$ ,  $G$  – odpowiednio moduł sprężystości podłużnej i poprzecznej.

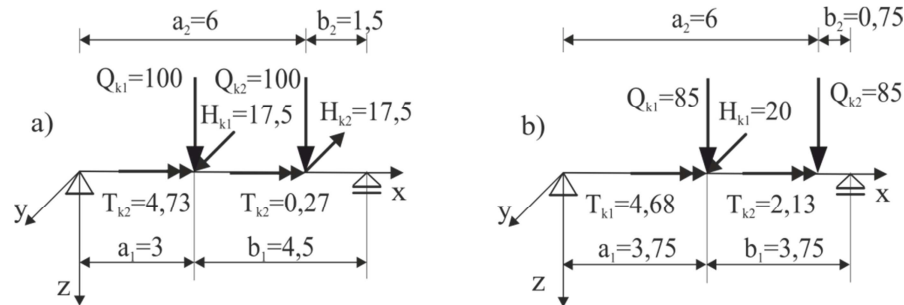
#### 4. Przykład obliczeniowy

Rozpatrzmy belkę podsuwnicową o przekroju złożonym z dwuteownika HEA450+2L100x16, dla dwóch schematów statycznych przedstawionych na rys. 3 [7]. Przyjęto szynę dźwigową A75/SD75 o wysokości  $h=85\text{mm}$ . W celu uproszczenia obliczeń pominiemy obciążenie ciężarem własnym belki i szyny. Obciążenia obliczeniowe otrzymano mnożąc wielkości charakterystyczne (Rys. 3) przez współczynnik obliczeniowy 1,35.

Za pomocą programu PropSection [5] wyznaczono charakterystyki przekroju:  $z_G=26,74\text{cm}$  (Rys. 1a),  $I_y=80521\text{cm}^4$ ,  $I_z=38729\text{cm}^4$ ,  $W_{el,y}=3011,3\text{cm}^3$ ,  $W_{el,z}=1549,2\text{cm}^3$ ,  $I_T=309,6\text{cm}^4$ ,  $I_w=8297,6 \cdot 10^3\text{cm}^6$ ,  $z_S=12,99\text{cm}$ ,  $\beta_z=-15,34\text{cm}$ .

Współrzędne przyłożenia sił skupionych (Rys. 1a) wyznaczono następująco:  $a_y=25\text{mm}$ ,  $a_z=440-267,4-129,9+85=127,7\text{mm}$ . Moment skręcający dla poszczególnych przypadków wyznaczono ze wzoru:  $T=Q \cdot a_y + H \cdot a_z$ . Moment krytyczny wyznaczono za pomocą programu LTBeam [4] ( $\alpha_{LT}=0,76$ ). W celu sprawdzenia warunków nośności i użytkowania użyto arkusza kalkulacyjnego.

W tabeli 2 przedstawiono charakterystyki przyjętego profilu. W tabelach 3 oraz 4 odpowiednie parametry dla schematu statycznego nr 1, natomiast w tabelach 5 i 6 dla schematu statycznego nr 2. Dopuszczalne ugięcie poziome wynosi  $L/600=7500/600=12,5\text{mm}$ .



Rys. 3. a) Schemat statyczny nr 1, b) schemat statyczny nr 2

Fig. 3. a) Static diagram no. 1, b) static diagram no. 2

Tabela 2. Charakterystyki przekroju złożonego HEA450+2L100x16

Table 2. Cross-sectional properties of combined HEA450+2L100x16 section

$GI_T$ [ $kNm^2$ ]	$EI_w$ [ $kNm^4$ ]	$k$ [1/m]	$M_{y,Rk}$ [ $kNm$ ]	$M_{z,Rk}$ [ $kNm$ ]	$B_{w,Rk}$ [ $kNm$ ]	$\gamma_{M0}$	$\gamma_{M1}$
250,8	1742,1	0,379	707,7	364,1	33,6	1,0	1,0

#### 4.1. Sprawdzenie warunków nośności i użytkowania dla schematu statycznego 1 (rys. 3a)

Wyznamy kąt skręcenia dla  $x=3m$  ( $b_1=4,5m$ ,  $b_2=1,5m$ ) jako sumę kątów skręcenia od poszczególnych charakterystycznych momentów skręcających (Tabela 1, lewy przedział):

$$\varphi_{k1}(T_{k1}) = \frac{4,73}{250,8k} \left( \frac{4,5}{7,5} k \cdot 3 - \frac{\sinh(4,5k)}{\sinh(7,5k)} \sinh(3k) \right) = 0,0123 \quad (13a)$$

$$\varphi_{k1}(T_{k2}) = \frac{0,27}{250,8k} \left( \frac{1,5}{7,5} k \cdot 3 - \frac{\sinh(1,5k)}{\sinh(7,5k)} \sinh(3k) \right) = 0,0004 \quad (13b)$$

Kąt skręcenia dla obciążeń charakterystycznych wynosi 0,0127rad, natomiast dla obciążeń obliczeniowych  $0,0127 \cdot 1,35 = 0,0172rad$ . Poniżej zestawiono pozostałe parametry ( $C_{mz}=0,95$ ).

Tabela 3. Rezultaty dla belki ze schematu statycznego wg rys. 3a

Table 3. Calculated results for beam shown in Fig. 3a

$M_{cr}$ [ $kNm$ ]	$M_{y,Ed}$ [ $kNm$ ]	$M_{z,Ed}$ [ $kNm$ ]	$\bar{M}_{z,Ed}$ [ $kNm$ ]	$B_{w,Rd}$ [ $kNm^2$ ]
3628	324	28,4	34	7,41

Tabela 4. Rezultaty dla belki ze schematu statycznego wg Rys. 3a (cd.)

Table 4. Calculated results for beam shown in Fig. 3a (continued)

$\chi_{LT}$	$k_w$	$k_{zw}$	$k_\alpha$	(1)	(5)	(7)
0,820	0,656	0,907	1,098	0,79	0,77	3,6 mm

#### 4.2. Sprawdzenie warunków nośności i użytkowania dla schematu statycznego 2 (rys. 3b)

Wyznamy kąt skręcenia dla  $x=3m$  ( $b_1=4,5m$ ,  $b_2=1,5m$ ) analogicznie jak (13a, b):  $\varphi_{k1}(T_{k1})=0,0131$ ,  $\varphi_{k1}(T_{k2})=0,0018$ . Kąt skręcenia dla obciążeń charakterystycznych wynosi więc 0,0149, natomiast dla obciążeń obliczeniowych  $0,0149 \cdot 1,35=0,0201$ . Poniżej zestawiono pozostałe parametry ( $C_{mz}=0,90$ ).

Tabela 5. Rezultaty dla belki ze schematu statycznego wg Rys. 3b

Table 5. Calculated results for beam shown in Fig. 3b

$M_{cr}$ [kNm]	$M_{y,Ed}$ [kNm]	$M_{z,Ed}$ [kNm]	$\overline{M}_{z,Ed}$ [kNm]	$B_{w,Rd}$ [kNm <sup>2</sup> ]
3905	258,2	50,6	55,8	7,9

Tabela 6. Rezultaty dla belki ze schematu statycznego wg Rys. 3b (cd.)

Table 6. Calculated results for beam shown in Fig. 3b (continued)

$\chi_{LT}$	$k_w$	$k_{zw}$	$k_\alpha$	(1)	(5)	(7)
0,831	0,653	0,847	1,071	0,72	0,75	4,2mm

#### 5. Uwagi i wnioski

W pracy przedstawiono metodę wymiarowania monosymetrycznych elementów zginanych i skręcanych, w której warunki równowagi wyznaczamy w konfiguracji po deformacji (po uwzględnieniu skręcenia przekroju). Prowadzi to do zwiększenia zarówno momentu zginającego względem osi słabszej jak i poziomego przemieszczenia elementu. Zaproponowana metoda pozwala na poprawne wyznaczenie sił przekrojowych i przemieszczeń zgodnych z teorią Własowa. Wzory na rozkład sił przekrojowych i przemieszczeń zaczerpnięte z pracy Ruteckiego [3] są proste i łatwe do wykorzystania w dowolnym arkuszu kalkulacyjnym. Wpływ odkształceń stycznych od skręcania St. Venanta uwzględniamy poprzez zmniejszenie nośności dla sił poprzecznych wg wzoru (6.28) z [8] ( $\tau_{t,Ed}=M_{v,Ed}t_w/I_T$ , gdzie:  $t_w$  – grubość środnika). W rozpatrywanych

przekrojach jest on pomijalny ( $V_{Ed}/V_{Rd} < 0,3$ ). Dzięki małym poziomym przemieszczeniom poprawia się jakość pracy suwnicy i zmniejsza jej awaryjność. Aby uzyskać spełnienie warunku na ugięcia poziome dla przekroju dwuteowego należałoby przyjąć profil HEB700 (ugięcie poziome około 12mm).

## Literatura

- [1] PN-EN 1993-6: 2009. Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 6: Konstrukcje wsporcze dźwignic.
- [2] Hughes A.F., Iles D.C., Malik A.S. (2011), Design of steel beams in torsion, Steel Construction Institute, Sliwood Park, Ascot, Publication Number SCI P385, Berkshire, 2011 [[http://www.steelconstruction.info/file:sci\\_p385.pdf](http://www.steelconstruction.info/file:sci_p385.pdf) : dostęp 20 maj 2015].
- [3] Rutecki J. Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1957.
- [4] Galéa Y.: Moment critique de déversement élastique de poutre fléchies –Présentation du logiciel LTBEAM. Revue Construction Métallique.CTICM, 2003(2).
- [5] PropSection v1.0.3, [www.cticm.com/content/propsection-v103](http://www.cticm.com/content/propsection-v103), dostęp 20.05.2016.
- [6] Bijak R., Chodor L.: Zginanie i skręcanie dwuteowników bisymetrycznych, Konstrukcje betonowe i metalowe, Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy, 2015.
- [7] Żmuda J.: Konstrukcje wsporcze dźwignic, PWN, Warszawa 2013.
- [8] PN-EN 1993-1-1:2006. Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.

## DIMENSIONING OF MONOSYMMETRIC BEAMS WITH FORK SUPPORTS UNDER BENDING AND TORSION

### Summary

In presented paper it was shown method of calculation beams of monosymmetric cross-section, under simultaneous bending and torsion, elaborated on basis of standard [1]. The method takes into account Vlasov's theory of torsion and introduces concept of bimoment. Bending moment about the minor axis of inertia (=axis of symmetry) is analyzed with respect to deformed configuration of section [2]. Analytic formulas for angle of twist are based on Vlasov's formulas shown in Rutecki's book [3].

**Keywords:** crane girder, bimoment, torsion, monosymmetric cross-section

*Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.*

*Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.*

DOI: 10.7862/rb.2016.37