

Janusz PĘDZIWIATR¹

UWAGI O WYMIAROWANIU MIMOŚRODOWO ŚCISKANYCH ŻELBETOWYCH PRZEKROJÓW KOŁOWYCH

Słupy żelbetowe o przekroju kołowym są powszechnie stosowane. Problemem jest ich projektowanie zgodne z EC2. Praktycznie dostępne są jedynie metody graficzne i autorskie programy komputerowe. W artykule przedstawiono dokładne rozwiązania analityczne oraz koncepcję metody uproszczonej. Pozwala to na samodzielne wykonanie obliczeń z dokładnością lepszą niż w przypadku korzystania z wykresów krzywych granicznych. Dokładne rozwiązania analityczne mogą służyć do weryfikacji wyników otrzymanych dzięki programom komputerowym.

Słowa kluczowe: słup, przekrój kołowy, wymiarowanie, metody analityczne

1. Wstępne uwagi

Słupy żelbetowe o przekroju kołowym są powszechnie stosowane. Problemem jest fakt, że projektanci dysponują jedynie bardzo ograniczoną pomocą przy ich projektowaniu. Praktycznie ogólnodostępne są jedynie nomogramy z krzywymi granicznymi (interakcji) o naturalnie ograniczonej dokładności [1], [2]. Są też autorskie programy, ale o niewiadomych założeniach i ograniczonym zastosowaniu, np. [3]. Brak jest metod analitycznych pozwalających na weryfikację wyników otrzymanych metodami numerycznymi oraz metod przybliżonych, które pozwalałyby samodzielnie projektować takie przekroje mniej zaawansowanym projektantom.

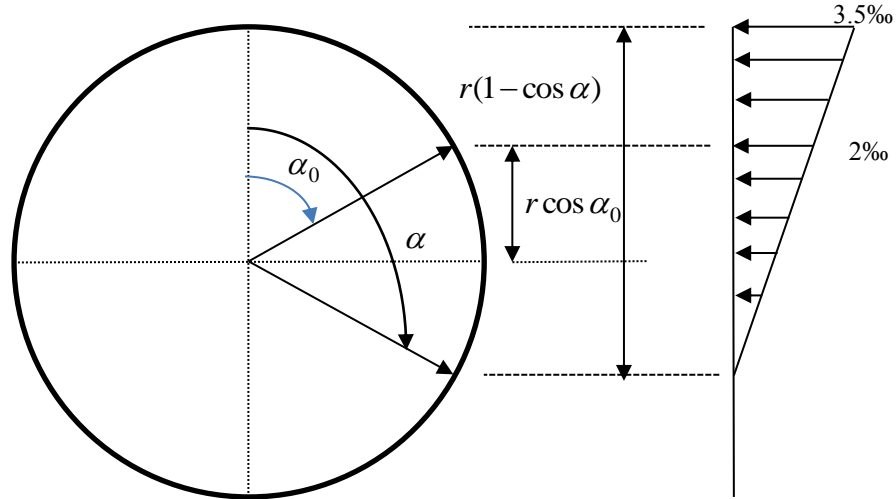
W artykule przedstawiono rozwiązania analityczne oraz wynikającą z nich metodę przybliżoną. Podstawą były założenia ogólne EC2 - nieliniowa zależność pomiędzy odkształceniem i naprężeniem w betonie oraz prawo płaskich przekrojów.

2. Analityczne wyznaczanie sił wewnętrznych

2.1. Beton – zależności ogólne

Określenie warunków równowagi sił jest skomplikowane od strony matematycznej. Kształt przekroju i nieliniowa zależność pomiędzy odkształceniem i naprężeniem w betonie powodują konieczność korzystania z rachunku całkowego.

¹ Janusz Pędziwiatr, Wydział Budownictwa PWR, janusz.pedziwiatr@pwr.edu.pl



Rys. 1. Schemat służący obliczaniu sił wewnętrznych w betonie

Fig. 1. Scheme for calculation of internal forces in concrete

Z prawa płaskich przekrojów wyznacza się kąt odpowiadający odkształceniu w betonie równemu $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$:

$$\cos \alpha_0 = \frac{4}{7}(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \quad (1)$$

Zależność pomiędzy odkształceniami a położeniem przekroju (kątem) opisuje równanie (2), w którym ϕ jest zmienną z przedziału od zera do α :

$$\varepsilon_c(\phi) = \frac{\varepsilon_{c2}}{1 - \cos \alpha} (\cos \phi - \cos \alpha) \quad (2)$$

Wypadkową siłę w betonie oblicza się całkując wartości naprężeń przy uwzględnieniu znanej zależności $\sigma = \sigma_c(\varepsilon_c)$

$$N_c = \int_{A_{cc}} \sigma_c dA_{cc} = 2r^2 f_{cd} \int_0^\alpha \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c(\phi)}{2} \right)^2 \right] \sin^2 \phi d\phi \quad (3)$$

Wykorzystując bezwymiarową zmienną $n_c = N_c / (f_{cd} \pi r^2)$ można całkę (3) zapisać w postaci:

$$n_c(\alpha) = n_{c0}(\alpha) + n_{c1}(\alpha) - n_{c2}(\alpha) \quad (4)$$

gdzie:

$$n_{c0} = \frac{1}{\pi} \left[\alpha_0 - \frac{1}{2} \sin(2\alpha_0) \right]$$

$$n_{c1} = \frac{1}{\pi} \frac{7}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \phi - \phi \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi + \phi \right) \right]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

$$n_{c2} = \frac{6.125}{\pi(1 - \cos \alpha)^2} \left[\left(\frac{1}{2} \sin 2\phi + \phi \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{3}{8} \right) + \phi \cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha \sin^3 \phi - \frac{1}{4} \cos^3 \phi \sin \phi \right]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

Postępując w analogiczny sposób można wyznaczyć wartość momentu względem osi poziomej. Odpowiednikiem zależności (3) jest równanie (5).

$$m_c = M_c / (f_{cd} \pi^2 d) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c(\phi)}{2} \right)^2 \right] \cos \phi \sin^2 \phi d\phi \quad (5)$$

Jego poszczególne składowe mają następujące postaci:

$$m_{c0} = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_0$$

$$m_{c1} = \frac{1}{\pi} \frac{3.5}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi + \phi \right) - \frac{1}{4} \sin \phi \cos^3 \phi - \frac{1}{3} \cos \alpha \sin^3 \phi \right]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

$$m_{c2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3.5}{1 - \cos \alpha} \right)^2 \left[\frac{1}{4} \cos \alpha \left(2 \cos^3 \phi \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi - \phi \right) + \left(2 + \cos^2 \phi \right) \sin \phi \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha - \frac{4}{15} \right) + \sin \phi \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{5} \cos^4 \phi \right) \right]_{\alpha_0}^{\alpha}$$

Tak określone siły wewnętrzne wyznaczane są dla konkretnych wartości kąta α .

2.2. Beton – zależności uproszczone

Postępując analogicznie do założeń upraszczających przyjmowanych przy wymiarowaniu przekrojów prostokątnych ($x_{eff} = 0.8x$) otrzymuje się że:

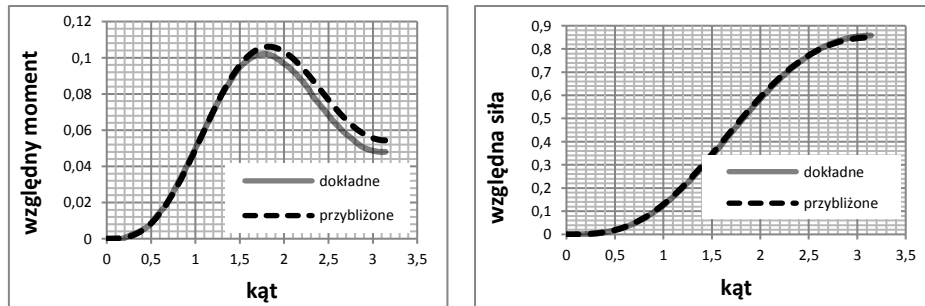
$$\alpha_{eff} = a \cos[1 - 0.8(1 - \cos \alpha)] \quad (6)$$

Dzięki temu siłę w betonie oraz wywołany nią moment można wyznaczyć w dużo prostszej postaci:

$$n_c = \frac{N_c}{f_{cd}\pi r^2} = \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) \quad (7)$$

$$m_c = \frac{M_c}{f_{cd}\pi r^2 d} = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_{eff} \quad (8)$$

Okazuje się, że różnica pomiędzy (4) i (7) oraz (5) i (8) jest niewielka. Ilustruje to rys.2.



Rys. 2. Porównanie wyników obliczeń dokładnych i przybliżonych

Fig. 2. Comparisons of exact and approximate calculations

2.3. Zbrojenie – zależności ogólne

Zbrojenie słupów stanowią pręty równomiernie rozmieszczone przy obwodzie. Ich liczba może się różnić (typowo 6 lub 8) a orientacja względem kierunku działania momentu bywa losowa. W takiej sytuacji wygodne (i wystarczająco dokładne) jest zastąpienie prętów zbrojeniem rozmytym. Zamiast pola zbrojenia A_s przyjmuje się zbrojenie równomiernie rozłożone o intensywności

$$a_s = \frac{A_s}{2\pi(r-a)} = \frac{A_s}{2\pi(1-a/r)}, \text{ gdzie } a \text{ jest otuliną. Przy wyznaczaniu sił}$$

i momentów związanych ze zbrojeniem należy wyznaczyć graniczne wartości kąta odpowiadające sytuacjom, w których ono się znajduje. Położenie osi obojętnej ($\varepsilon_s = 0$) określa kąt β_0 , taki że $\cos \beta_0 = \frac{\cos \alpha}{(1-a/r)}$.

- w przedziale od 0 do β_c stal jest w pełni wykorzystana na ściskanie,
- w przedziale od β_c do β_0 jest ściskana,
- w przedziale od β_0 do β_t jest rozciągana,
- w przedziale od β_t do π jest w pełni wykorzystana na rozciąganie.

Wartości tych kątów oblicza się korzystając z prawa płaskich przekrojów.

$$\cos \beta_c = \frac{1}{1-a/r} \left[(1-\cos \alpha) \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu2}} + \cos \alpha \right] \quad (9)$$

$$\cos \beta_t = \frac{1}{1-a/r} \left[\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu2}} (\cos \alpha - 1) + \cos \alpha \right] \quad (10)$$

Wypadkową względną siłę w zbrojeniu otrzymuje się w wyniku całkowania odkształceń w stali w odpowiednich przedziałach.

$$n_s = \frac{N_s}{f_{cd} A_c} = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} A_c \pi} \int_0^\pi \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} d\phi = \frac{\omega}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} d\phi \quad (11)$$

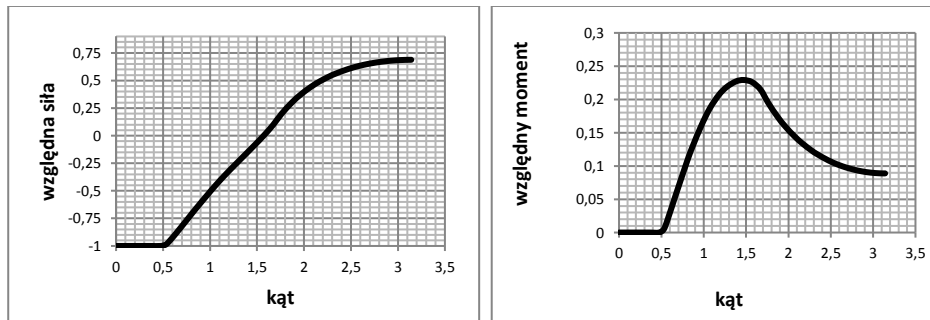
Prowadzi to do następujących zależności:

$$n_{s4} = -\omega \frac{\pi - \beta_t}{\pi}, \quad \phi \in (\beta_t; \pi) \quad (12)$$

$$n_{s3} = -\frac{\omega}{\pi \varepsilon_{pl}} \frac{\varepsilon_{cu2}}{1 - \cos \alpha} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \sin \phi - \phi \cos \alpha \right]_{\beta_t}^{\beta_0} \quad (13)$$

$$n_{s2} = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_{pl}} \frac{\varepsilon_{cu2}}{1 - \cos \alpha} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \sin \phi - \phi \cos \alpha \right]_{\beta_0}^{\beta_c} \quad (14)$$

$$n_{s1} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\beta_c} d\phi = \omega \frac{\beta_c}{\pi} \quad (15)$$



Rys. 3. Typowe wykresy zależności pomiędzy położeniem i siłami wewnętrznymi w zbrojeniu

Fig. 3. Typical graphs for internal forces in a steel due to an angle

Całkowita siła jest sumą tych czterech składników. Symbol $\omega = \rho f_{yd} / f_{cd}$ oznacza względną moc zbrojenia. Wartości względnych momentów oblicza się w analogiczny sposób:

$$m_s = \frac{A_s f_{yd}}{2 \pi f_{cd} A_c} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \int_0^\pi \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \phi d\phi = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2 \pi} \int_0^\pi \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \phi d\phi \quad (16)$$

2.4. Zbrojenie – zależności przybliżone

Zależności przybliżone można sformułować linearyzując je na trzech odcinkach. Pierwszy obejmuje zakres kąta od zera do miejsca, gdzie siła w stali staje się większa od -1.0 – kąt ϕ_0 . Drugi obejmuje zakres $\phi_0 - \pi/2$, a trzeci $\pi/2$ do π . Przeliczenie miar tych kątów na ϕ_{eff} prowadzi do sformułowania konkretnych wartości równań.

Przedział 1:

$$n_{Ed} = \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) - \omega, \quad m_{Ed} = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_{eff} \quad (17)$$

Po wyznaczeniu α_{eff} oblicza się $\omega = \rho f_{yd} / f_{cd}$ i w konsekwencji stopień zbrojenia.

Przedział 2:

Siła w stali zmienia się od $-\omega$ do 0, a momenty od 0 do m_{s1} . Z warunku równowagi sił wyznacza ω

$$\omega = \frac{\phi_{1,eff} - \phi_{0,eff}}{\alpha_{eff} - \phi_{1,eff}} \left[n_{Ed} - \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) \right] \quad (18)$$

i po wstawieniu do warunku równowagi momentów otrzymuje się:

$$m_{Ed} = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_{eff} + m_{s1} \frac{\alpha_{eff} - \phi_{0,eff}}{\alpha_{eff} - \phi_{1,eff}} \left[n_{Ed} - \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) \right] \quad (19)$$

umożliwiające numeryczne wyznaczenie α_{eff} i w konsekwencji $\omega = \rho f_{yd} / f_{cd}$.

Przedział 3:

$\alpha_{eff} \in \langle \phi_{1,eff}; \phi_{2,eff} \rangle = \langle 1.369; 1.2.214 \rangle$, siła w stali zmienia się od zera n_2 a momenty od m_1 do m_2 . Z warunku równowagi sił wyznacza się ω i wstawia do warunku równowagi momentów. Prowadzi to do równania:

$$m_{Ed} = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_{eff} + \frac{\alpha_{eff}(m_2 - m_1) + m_1\phi_2 - m_2\phi_1}{n_2(\alpha_{eff} - \phi_{1,eff})} \left[n_{Ed} - \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) \right] \quad (20)$$

Po numerycznym wyznaczeniu α_{eff} , z warunku równowagi sił oblicza się ω

$$\omega = \frac{\phi_{2,eff} - \phi_{1,eff}}{n_2(\alpha_{eff} - \phi_{1,eff})} \left[n_{Ed} - \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{eff} - \sin 2\alpha_{eff}) \right] \quad (21)$$

Wartość kąta ϕ_0 wyznacza się przyjmując, że jest to graniczna wartość przy której odkształcenia w stali są wszędzie $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{pl}$. Jest ona wartością stosunku a/r (otulina/promień przekroju). Występujące we wzorach wartości m_1 , m_2 , n_2 oblicza się ze wzorów podanych w punkcie 2.3 – są one zależne od a/r .

3. Uwagi końcowe

W analogiczny sposób można rozwiązać zagadnienie wymiarowania przekrojów całkowicie ściskanych. Zamiast zmiennej α_{eff} stosuje się wtedy na przykład ε_b - odkształcenie betonu w skrajnych mniej ściskanych włóknach betonu.

W tym zakresie pracy przekroju linearyzacja jest bardzo dobrze uzasadnionym podejściem ze względu na relatywnie małe zmiany sił i momentów.

Wyniki otrzymane z przedstawionej metody obliczeń wykazują dobrą zgodność z rezultatami wynikającymi ze ścisłych rozwiązań. Dokładność zależy między innymi od wartości stosunku a/r . Im jest on większy tym zgodność jest lepsza. Oczywiście przy zastosowanej metodzie linearyzacji istotny jest też wpływ „miejsca” – im bliżej końców przedziału tym lepiej. W tabeli 1 zestawiono typowe wyniki porównań dla $a/r=0.2$. W najgorszym przypadku niedowymiarowanie sięga 15% a przewymiarowanie 24%. Raczej nie przekłada się to na

Tabela 1. Wyniki porównania metody dokładnej i uproszczonej

Table 1. Comparisons of results from strict and approximate methods

przedział	m_{Ed}	n_{Ed}	α	ω	α_{eff}	$\omega_{przyb.}$	różnica %
$\alpha_{eff} \in \langle 1.369; 2.214 \rangle$	0.122	0.396	1.6	0.1	1.4019	0.096	-4.5
	0.143	0.472	1.7	0.2	1.497	0.185	-7.5
	0.078	1.043	2.9	0.3	2.214	0.271	-15
	0.192	0.396	1.6	0.4	1.393	0.409	5
$\alpha_{eff} \in \langle 0.448; 1.369 \rangle$	0.111	0.292	1.4	0.1	1.254	0.100	0
	0.124	0.203	1.3	0.2	1.165	0.237	18
	0.118	0.042	1.1	0.3	1.021	0.370	24
	0.084	0.028	1.0	0.2	0.931	0.244	22

praktyczne różnice – przy stosowaniu np. sześciu prętów. Jest to dużo dokładniej niż przy metodach graficznych z typowym „skokiem” w rzędu 0.1- 0.2.

Literatura

- [1] Knauff M.: Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2. PWN 2012.
- [2] Moss R. How to design concrete structures using EC2. Columns (ed. The Concrete Center) 2006.
- [3] Program opracowany w Katedrze Budownictwa Betonowego Politechniki Łódzkiej – dzięki uprzejmości prof. Urbana.

SOME REMARKS ON THE DIMENSIONING OF CONCRETE CIRCULAR CROSS SECTION UNDER ECCENTRIC COMPRESSION

S u m m a r y

Concrete columns with circular cross section are commonly used in practice. There are some problems with a proper designing according to the code EC2. Only graphical method and some private computer programs are available to use. In the article strict analytical solutions are shown with the concept of approximate method. It allows to calculate the steel area with a more accuracy than those from graphical methods and also check the results obtained from computer programs.

Keywords: : column, circular cross section, dimensioning, analytical methods

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/tb.2016.32