

Izabela SKRZYPCZAK¹
 Lidia BUDA-OŻÓG²

KRYTERIA ZGODNOŚCI DLA WYTRZYMAŁOŚCI BETONU NA ŚCISKANIE – METODA AUTORSKA

Podstawowym działaniem związanym z kontrolą zgodności betonu ze specyfikacją jest kontrola wytrzymałości na ściskanie. Decyzja o zgodności lub niezgodności wytrzymałości jest podejmowana na podstawie porównania wyników badań próbek z kryterium zgodności. Kryteria zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie są określone w normie PN-EN 206:2014 i zakładają odniesienie się do wartości średniej i minimalnej, przy założeniu, że zmienna wytrzymałości betonu na ściskanie ma rozkład normalny. W przypadku próby o małej liczebności $n=3$ i produkcji początkowej nie można założyć, że wytrzymałość na ściskanie ma rozkład normalny. W artykule zaprezentowano procedurę wyznaczania wartości współczynnika testowego, w przypadku, gdy rozkład wytrzymałości jest różny od normalnego. Omówiono metodę klasyczną zalecaną przez m.in. Montgomery'ego oraz autorską metodę szacowania wartości współczynnika testowego. Stwierdzono, iż w przypadku nieznanego rozkładu, proponowana metoda może być stosowana do szacowania wartości współczynników testowych. Otrzymane wartości współczynników testowych 3,094 dla próby o liczebności $n=3$ oraz 1,842 dla próby o liczebności $n=15$ są zbieżne z wartościami uzyskanymi dla metody wnioskowania statystycznego oraz metody Bayesa i znanego estymatora odchylenia standardowego. Wartości współczynników testowych zweryfikowano za pomocą krzywych AOQ (średniej wadliwości po kontroli), które umożliwiają sprawdzenie proponowanych wartości liczbowych. Wykorzystanie wartości współczynników testowych szacowanych zaproponowaną metodą w kryteriach zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie gwarantuje uzyskanie przez beton projektowanej klasy betonu.

Słowa kluczowe: kryteria zgodności, jakość, beton, współczynnik testowy

1. Wprowadzenie

Statystyczna kontrola jakości zajmuje się głównie zagadnieniami związanymi ze statystycznymi metodami odbioru produktów sztukowych oraz kontroli

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Izabela Skrzypczak, Politechnika Rzeszowska, Zakład Geodezji i Geotechniki im. Kaspra Weigla, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651010; izas@prz.edu.pl

² Lidia Buda-Ożóg, Politechnika Rzeszowska, Katedra Konstrukcji Budowlanych, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel.177432402; lida@prz.edu.pl

bieżącej prowadzonej w trakcie produkcji, na podstawie losowej, tzn. reprezentatywnej części badanej całości. Opracowanie planu kontroli jakości nie jest zagadnieniem łatwym. Poglądy na temat kryteriów zgodności oraz dobór współczynników testowych nie są spójne, stąd duża różnorodność kryteriów zgodności, które zostały zaproponowane w krajowych i zagranicznych wytycznych projektowych oraz zaleceniach normowych.

Podstawowym działaniem związanym z kontrolą zgodności betonu ze specyfikacją jest kontrola wytrzymałości na ściskanie. Decyzja o zgodności lub niezgodności wytrzymałości jest podejmowana na podstawie porównania wyników badań próbek z kryterium zgodności. Decyzja o uznaniu zgodności badanego materiału ze specyfikacją podejmowana jest na podstawie przyjętego planu statystycznej kontroli jakości. W przypadku wytrzymałości betonu na ściskanie jest to najprostszy pojedynczy plan badania wadliwości.

2. Kontrola jakości wytrzymałości na ściskanie

Kontrolę zgodności wytrzymałości na ściskanie przeprowadza się na betonach o określonych składach (receptach) lub na rodzinach betonów. Norma PN-EN 206-1: 2014 rozróżnia produkcję początkową oraz produkcję ciągłą, dla których plan pobierania próbek oraz kryteria zgodności są różne. Produkcja początkowa obejmuje produkcję do momentu uzyskania co najmniej 35 wyników badań w okresie nie przekraczającym 12 miesięcy [1, 3].

Dużą część producentów betonu dokonuje oceny zgodności produkowanego betonu zgodnie z kryteriami jak dla produkcji początkowej (Tabela 1) z uwagi na to, że same kryteria są łatwiejsze w stosowaniu bowiem nie wymagają uwzględnienia wpływu odchylenia standardowego badanej cechy. Przy dużej niejednorodności produkowanego betonu, kryteria zgodności dla produkcji ciągłej są bardziej rygorystyczne niż dla produkcji początkowej. Norma [1] przewiduje również dodatkową metodę C oceny wytrzymałości betonu na ściskanie, metodę opartą na kartach kontrolnych.

Tabela 1. Kryteria zgodności dotyczące wytrzymałości na ściskanie zgodnie z [1]

Table 1. Conformity criteria for compressive strength according to [1]

Produkcja	Liczba „n” wyników badań wytrzymałości na ściskanie w zbiorze	Metoda A	Metoda B
		średnia z „n” wyników (f_{cm}) [N/mm ²]	dowolny pojedynczy wynik badania (f_{ci}) [N/mm ²]
Początkowa	< 15	$\geq f_{ck} + 4$	$\geq f_{ck} - 4$
Ciągła	≥ 15	$\geq f_{ck} + 1,48 \sigma$	$\geq f_{ck} - 4$

Kryterium zgodności dla wartości średniej i metody B zaproponowane w normie PN-EN-206-1 [1] przyjęte zostało zgodnie z poniższym algorytmem (1÷4):

$$f_{cm} \geq f_{ck} + k_1 \quad (1)$$

$$f_{cm} \geq f_{ck} + \left(\frac{k_1}{\sigma}\right) \cdot \sigma \quad (2)$$

$$f_{cm} \geq f_{ck} + \lambda' \cdot \sigma \quad (3)$$

gdzie: $k_1 = 4$ - wartość współczynnika testowego zalecanego przez [1],

σ - odchylenie standardowe dla populacji

$$\frac{k_1}{\sigma} = \lambda' \quad (4)$$

Zaproponowane przez Taerwe [6] i zalecane w normie PN-EN 206 [1] wartości λ dla skorelowanych wyników to (Tabela 2).

Tabela 2. Wartości λ dla wyników skorelowanych prób o różnej liczebności, na podstawie [5,6]

Table 2. The values of λ for the results correlated samples of different sizes, based on [5,6]

Liczba „n” wyników	Wartość λ
3	2,67
15	1,48

W przypadku produkcji początkowej norma narzuca stałą wartość odchylenia standardowego dla produkowanego betonu na poziomie $4/2,67=1,5$ MPa bez względu na wartość średniej wytrzymałości betonu.

3. Statystyczna kontrola jakości

Na podstawie pobranej próbki o określonej liczebności zgodnej z zalecanym planem badania, (Tabela 1) podejmowane są decyzje o akceptacji weryfikowanej partii betonu. W przypadku planów badań dotyczących weryfikacji jakości betonu i jego akceptacji jest to tzw. metoda "off - line", bowiem stosuje się ją w momencie, gdy produkcja danej partii jest zakończona, a celem badania jest zapewnienie betonu o odpowiednich wymaganiach, określa się dolną (L) lub/i górną granicę (U) specyfikacji, które definiują dopuszczalne wartości da-

nego parametru [5, 7]. Klasyczny przypadek ograniczenia dolnego, kiedy znane jest odchylenie standardowe σ można przedstawić wzorem [5]:

$$\frac{f_{cm-L}}{\sigma} \geq \lambda \quad (5)$$

Stała akceptacji k jest wyznaczana jest z zależności:

$$\lambda = \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} - u_w \quad (6)$$

gdzie: n – liczebność próby,

w – akceptowalny dopuszczalny poziom wadliwości

α – poziom istotności, prawdopodobieństwo odrzucenia partii wadliwych.

W przypadku weryfikacji jakości betonu według zalecanych normowych kryteriów zgodności oczekuje się, że plany przyjęcia gwarantują przyjęcie partii o maksymalnej wadliwości $w = 0,05$ z co najmniej prawdopodobieństwem $1-\alpha = 0,95$ i gwarantują uzyskanie przez beton założonej klasy betonu. Odnosząc się do metody klasycznej i wzoru (6) określono współczynniki testowe λ dla wadliwości dopuszczalnej i dyskwalifikującej [Tabela 3].

Tabela 3. Wartości współczynnika testowego λ określonego metodą klasyczną

Table 3. The values of the test λ defined by the classical method

Liczebność próby	Dopuszczalny poziom wadliwości $w = 0,05$
3	2,595
4	2,467
5	2,380
6	2,316
7	2,267
8	2,226
9	2,193
10	2,165
11	2,141
12	2,120
13	2,101
14	2,084
15	2,070

Na podstawie otrzymanych wyników metodą klasyczną można stwierdzić, że dla próby o małej liczebności $n=3$ otrzymana wartość współczynnika testowego 2,595 jest wartością zbliżoną do zalecanej wartości normowej równej 2,67.

Wartość współczynnika testowego $\lambda = 2,070$ otrzymana dla próby o liczebności $n=15$ różni się od zalecanej w normie wartości 1,48.

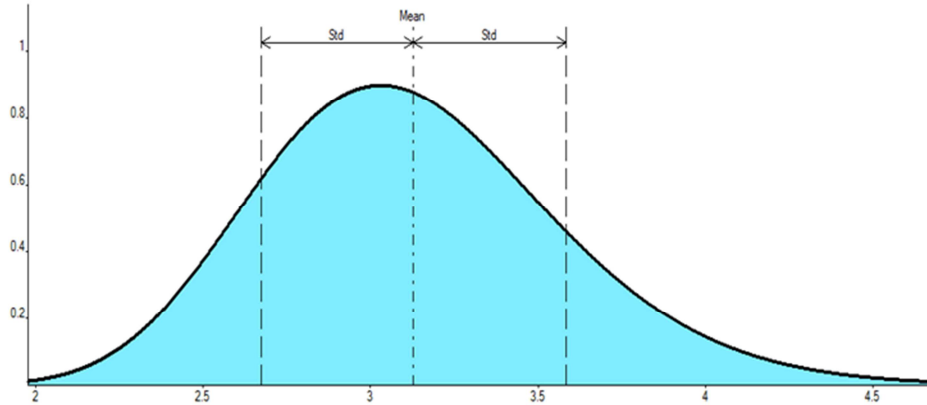
4. Alternatywna metoda szacowania wartości współczynnika testowego

W przypadku próby o małej liczebności $n=3$ i produkcji początkowej nie można założyć, że wytrzymałość na ściskanie ma rozkład normalny, dlatego zaproponowano algorytm do wyznaczenia wartości współczynnika testowego.

Procedura określania współczynnika testowego, w przypadku gdy rozkład kontrolowanej zmiennej nie jest znany można określić w następujący sposób:

1. Określić klasę betonu i wygenerować próbę o liczebności $n=3$ zgodnej z rozkładem normalnym (N) lub logarytm-normalnym (LN) (prawdopodobieństwo wylosowania rozkładu N lub LN - 0,5), dla określonego odchylenia standardowego ($\sigma = 2, 3, 4, 5$ MPa – prawdopodobieństwo wylosowania 0,25), dla określonej średniej $f_{cm} = f_{ck} + 8$
2. Obliczyć wartość średnią $f_{cm}(n)$ oraz rozstęp R
3. Oszacować odchylenie standardowe S korzystając ze wzoru L. Brunarskiego [4]
4. Przyjąć f_{ck} jako $L = f_{ck}$
5. Określić wartość $\lambda^* = \frac{f_{cm}(n) - f_{cm}}{S}$
6. Określić wartość $\lambda^{**} = \frac{f_{cm}(n) - f_{ck}}{S}$
7. Powtórzy pkt 1-4 N razy otrzymując tablicę wartości λ^* , λ^{**}
8. Dopasować odpowiedni rozkład do otrzymanych wartości
9. Oszacować nieznanne parametry rozkładu dla wartości λ
10. Akceptowalna wartość współczynnika testowego λ to wartość oczekiwana.

Przykład zastosowania przyjętej metody odniesiono do klasy betonu C25/30 pobierając próbę o liczebności 3 i 15. Liczba wykonanych iteracji N to 30 000. Wartość współczynnika testowego obliczona dla analizowanej klasy betonu na podstawie zaproponowanego algorytmu, to 3,094 dla $n=3$ (Rys. 1) oraz 1,842 dla $n=15$.



Rys. 1. Teoretyczna funkcja gęstości otrzymana dla wartości współczynnika testowego dla $n=3$

Fig. 1. The theoretical density function obtained for the the values of test factor $n=3$

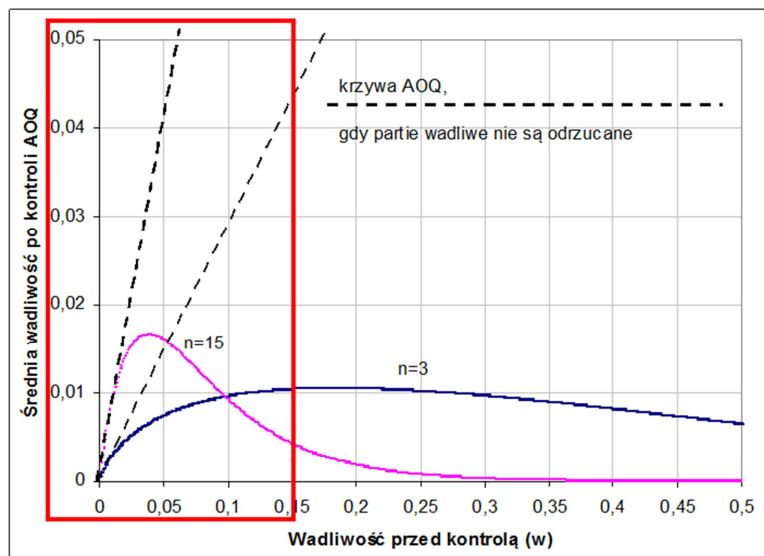
Otrzymane wartości są zbieżne z wartościami uzyskanymi dla metody wnioskowania statystycznego (poziom ufności $\gamma=0,75$) oraz metody Bayesa i nieznanego odchylenia standardowego (Tabela 4).

Tabela 4. Zestawienie wartości współczynnika λ ustalonych różnymi metodami

Table 4. Summary values λ determined by different methods

Znany estymator odchylenia standardowego S (nieznane σ)			
Metoda wnioskowania		$n=3$	$n=15$
Wartości normowe		2,67	1,48
Metoda klasyczna Montgomery		2,595	2,070
Metoda proponowana		3,094	1,842
Wnioskowanie statystyczne	$(\gamma=0,75)$	3,15	1,99
Wnioskowanie Bayesa		3,37	1,82

Wartości współczynników testowych zweryfikowano za pomocą krzywych AOQ (średniej wadliwości po kontroli), które umożliwiają sprawdzenie proponowanych wartości liczbowych (Rys. 2). Otrzymane średniej wartości wadliwości po kontroli są mniejsze od zalecanego kwantyla zdefiniowanego dla wytrzymałości charakterystycznej równiej 0,05, a więc zastosowanie w kryteriach zgodności proponowanych wartości liczbowych dla współczynników testowych gwarantuje uzyskanie przez beton projektowanej klasy betonu.



Rys. 2. Wykres krzywych AOQ dla proponowanych wartości współczynników testowych i próby o liczebności $n=3$ lub $n=15$

Fig. 2. AOQ curves for the determining the values of test factor and samples of size $n = 3$ or $n = 15$

5. Podsumowanie

Plan kontroli odbiorczej oparty na ocenie właściwości liczbowych zakłada, iż kontrolowana charakterystyka ma rozkład normalny. W przypadku weryfikowania wytrzymałości betonu na ściskanie plan odbiorczy, a więc kryteria zgodności zostały sformułowane w PN-EN 206:2014. W artykule zaprezentowano procedurę wyznaczania współczynnika testowego λ dla planu odbiorczego o zadanej liczebności próby, w przypadku nieznanego rozkładu wytrzymałości betonu na ściskanie. Otrzymane wartości współczynników testowych to 3,094 dla $n=3$ oraz 1,842 dla $n=15$. Wartości te są zbliżone z wartościami uzyskanymi dla metody wnioskowania statystycznego (poziom ufności $\gamma=0,75$) oraz metody Bayesa i znanego estymatora odchylenia standardowego. Wykorzystanie wartości współczynników testowych szacowanych zaproponowaną metodą w kryteriach zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie gwarantuje uzyskanie przez beton projektowanej klasy betonu.

Literatura

- [1] PN-EN 206:214 Beton. Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność,
- [2] Bajorek G., Kiernia-Hnat M., Skrzypczak I., Analiza kosztów kontroli odbiorczej w przypadku błędów kwalifikacji, Materiały Budowlane, 3, 2013 str. 76-78.

- [3] Brunarski L., Podstawy matematyczne kształtowania kryteriów zgodności wytrzymałości materiałów, Wydawnictwo ITB, Warszawa, 2009.
- [4] Czarnecki L. Praca zbiorowa, Beton według normy PN-EN 206-1 – komentarz, Polski Cement, Kraków 2004.
- [5] Montgomery D. C, Introduction to Statistical Quality Control. John Wiley&Sons. Inc. Six Edition. New York, 2009.
- [6] Taerwe L. Evaluation of compound compliance criteria of concrete strength. Materials and Structures, Vol. 21, 1988, p.13-20.
- [7] Wetherill G. B., Chiu W. K, A Review of Acceptance Sampling Schemes with Emphasis on the Economic Aspect. International Statistical Review., 1975, Vol. 43. p.191-210.

CRITERIA OF CONFORMITY FOR COMPRESSIVE STRENGTH OF CONCRETE – AUTHOR’S METHOD

Summary

The primary action associated with the control of the compliance with the specifications the concrete is to control the compressive strength. The decision on the compliance or incompliance strength of concrete is taken based on the comparison of test results of samples from compliance criteria. Compliance criteria for compressive strength of concrete are described in standard EN 206: 2014 and they are established in reference to the average and minimum values, assuming that the variable compressive strength has a normal distribution. For small numbers of samples $n = 3$ and initial production can't be assumed that the compressive strength has a normal distribution. The paper has presented the procedure for determining the values of test factor, where the strength distribution is different from normal distribution. The article discusses the classical method recommended by, among others, Montgomery and the author's method of estimating the values of the test factor. In the case of ignorance of distribution, the proposed method can be used to estimate the value of test factor. Obtain values of test factor are 3.094 for sample of size $n = 3$ and 1,842 for the sample size $n = 15$ are converging with the values obtained for the methods of statistical inference and Bayesian methods and known estimator of standard deviation. The values of the test factor was verified by curves AOQ (average defect after checking), which allow you to check the proposed values. The use of the values of test factor proposed by the compliance criteria are guarantees obtained for concrete the designed classes of strength.

Keywords: compliance criteria, quality, concrete, test factor

Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.

Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.

DOI: 10.7862/rb.2016.18