

Olga SZLACHETKA<sup>1</sup>  
Monika WĄGROWSKA<sup>2</sup>

## ROZKŁAD TEMPERATURY W WIELOSKŁADNIKOWYM WIELOWARSTWOWYM KOMPOZYCIE Z POPRZECZNĄ GRADACJĄ WŁAŚCIWOŚCI EFEKTYWNYCH

Przedmiotem rozważań jest jednowymiarowe, stacjonarne zagadnienie przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia w wieloskładnikowym, wielowarstwowym kompozycie o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych. W celu wyznaczenia rozkładu temperatury wykorzystano wariant asymptotyczny modelowania tolerancyjnego. Obliczono wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła oraz wyznaczono rozkłady temperatury dla pewnych szczególnych przypadków.

**Słowa kluczowe:** przewodnictwo ciepła, modelowanie tolerancyjne, kompozyt o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych

### 1. Wstęp

Ułożenie jednorodnych, termicznych warstw w wielowarstwowej przegrodzie nie wpływa na wartość całkowitego oporu cieplnego, a tym samym na wartość współczynnika przenikania ciepła, jednak znacząco wpływa na rozkład temperatury. Przy różnych układach warstw wykonanych z tych samych materiałów uzyskuje się różne rozkłady temperatury. Istotne jest wybranie takiego układu warstw, który daje optymalny w danym przypadku rozkład temperatury.

W pracy rozpatrzono, składającą się z wielu składników, strukturę wielowarstwową, która charakteryzuje się poprzeczną gradacją cieplnych właściwości efektywnych.

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Olga Szlachetka, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa, tel. 22 5935110, olga\_szlachetka@wp.pl

<sup>2</sup> Monika Wągrowka, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa, tel. 22 5935103, monika\_wagrowska@sggw.pl

Przez wieloskładnikową, wielowarstwową strukturę o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych rozumie się układ składający się z dużej liczby warstw o stałej grubości, gdzie każda warstwa składa się, z co najmniej trzech różnych, warstwowo ułożonych składników (podwarstw). W każdej warstwie grubości podwarstw wykonanych z odpowiadających sobie materiałów, różnią się od siebie, w taki sposób, że dwie sąsiednie warstwy mogą być traktowane jako nierozróżnialne makroskopowo. Jednocześnie dopuszcza się nawet znaczną różnicę grubości podwarstw wykonanych z odpowiadających sobie materiałów w warstwach od siebie odległych.

Rozkład temperatury w obszarze wielowarstwowej przegrody można wyznaczyć wykorzystując teorię przewodnictwa ciepła Fouriera. Ze względu na to, że charakterystyki materiałowe rozpatrywanych struktur są funkcjami nieciągłymi, skokowo zmieniającymi swoje wartości na płaszczyznach kontaktu między sąsiadującymi składnikami (na tzw. interfejsach) – współczynniki funkcyjne w równaniu różniczkowym cząstkowym przewodzenia ciepła są nieciągłe. Niemożliwe jest w takim przypadku uzyskanie rozwiązania w postaci analitycznej, a zastosowanie metod numerycznych jest czasochłonne, a czasami wręcz niemożliwe. Celem pracy jest, w oparciu o wariant asymptotyczny metody modelowania tolerancyjnego [4-6]:

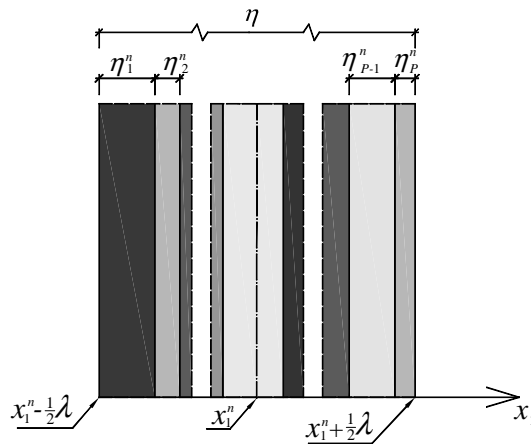
- wyznaczenie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia w kompozycie o poprzecznej gradacji właściwości;
- analiza rozkładów temperatury w wybranych przypadkach mająca na celu pokazanie możliwości zaprojektowania układu podwarstw struktury kompozytowej tak, aby z punktu widzenia rozchodzenia ciepła realizowany był zadany z górny rozkład temperatury.

Zagadnienie przewodnictwa ciepła w ramach metody modelowania tolerancyjnego w dwuskładnikowych strukturach o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych omówione jest np. w [1-2, 8], a w pracy [7] analizowano możliwość projektowania takich struktur. Natomiast wieloskładnikowe struktury o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych rozpatrzono w [3].

## 2. Przedmiot rozważań

Analizowana struktura zajmuje obszar  $\Omega \equiv (0, L_1) \times \Xi$ ,  $\Xi \equiv (0, L_2) \times (0, L_3)$  i składa się z dużej liczby  $N$  ( $1/N \ll 1$ ) warstw o stałej grubości  $\eta$ , ( $\eta \equiv L_1 / N$ ). Każda warstwa składa się z  $M$  jednorodnych materiałów, które są sztywnymi przewodnikami ciepła. Z materiałów utworzonych jest  $P$  idealnie połączonych ze sobą podwarstw. Liczba podwarstw  $P$  jest, co najmniej równa liczbie materiałów  $M$ . Właściwości cieplne kompozytu opisane są przez tensor przewodnictwa ciepła  $\Lambda$ , który dla poszczególnych materiałów  $M$  przyjmuje

wartości  $\Lambda_m$ ,  $m=1,2,\dots,M$ . Składowe tensora  $\Lambda_m$  przyjmują wartości  $\lambda_m^{\alpha\beta}$ , gdzie  $\alpha,\beta=1,2,3$ . Założono, że składniki wchodzące w skład struktury kompozytowej są izotropowe, zatem tensor przewodnictwa ciepła w  $m$ -tym,  $m=1,2,\dots,M$  materiale przyjmuje postać:  $\Lambda_m = \lambda_m \cdot \mathbf{1}$ , gdzie  $\mathbf{1}$  jest macierzą jednostkową. W każdej warstwie wyróżniono płaszczyznę środkową  $x_1 = x_1^n \equiv \frac{\eta}{2} + (n-1)\eta$ ,  $n=1,\dots,N$ . Schemat warstwy rozpatrywanego kompozytu przedstawiono na Rys. 1. Rozpatrzono zagadnienie jednowymiarowego, stacjonarnego przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia.



Rys. 1. Schemat warstwy wieloskładnikowego, wielowarstwowego kompozytu o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych

Fig 1. Scheme of the layer of multicomponent, multilayered composite with transversal gradation of effective properties

W kompozycie o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych, zmiana właściwości materiałowych zachodzi wzdłuż kierunku prostopadłego do uwarstwienia (wzdłuż osi  $Ox_1$ ), i nie można w niej wyróżnić powtarzającej się komórki. W celu opisanego struktury materiałowej wprowadza się funkcje  $\varphi_p(\cdot)$ ,  $p=1,\dots,P$ , nazywane funkcjami nasycenia, takie, że  $\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_P(x_1) = 1$  dla każdego  $x_1 \in (0, L_1)$ . Wartości funkcji nasycenia na płaszczyznach środkowych  $x_1^n$ ,  $n=1,\dots,N$  są interpretowane jako frakcja  $p$ -tego składnika wchodzącego w skład warstwy, w której dana płaszczyzna środkowa się znajduje. Grubość  $p$ -tej,  $p=1,\dots,P$  podwarstwy w  $n$ -ej,  $n=1,\dots,N$  warstwie można zapisać jako  $\eta_p^n = \varphi_p(x_1^n)\eta$ .

### 3. Procedura modelowania

W wariacie asymptotycznym metody modelowania tolerancyjnego, zwanym homogenizacją lokalną, stacjonarne pole temperatury  $\theta(\cdot)$  przy zadanych warunkach brzegowych przybliża się przez pole  $\tilde{\theta}(\cdot)$ , [13-15]:

$$\theta(\mathbf{x}) \approx \tilde{\theta}(\mathbf{x}) = \vartheta(\mathbf{x}) + \gamma(x_1)\psi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

gdzie:  $\vartheta(\cdot)$  - uśredniona temperatura,  $\psi(\cdot)$  - amplituda fluktuacji temperatury,  $\gamma(\cdot)$  - globalna funkcja mikro-kształtu, której postać związania jest z budową kompozytu.

Pola  $\vartheta(\cdot)$  i  $\psi(\cdot)$  są funkcjami klasy  $C^1$  w obszarze  $\Omega$ . Są to funkcje nieznanne i należy je wyznaczyć zgodnie z procedurą modelowania opisaną np. w [6]. Globalna funkcja mikro-kształtu  $\gamma(\cdot)$  musi spełniać warunki przedstawione np. w [3]. Jest ciągła, określona dla wszystkich  $x_1$ ,  $x_1 \in [0, L]$ , liniowa pomiędzy interfejsami. Wartości funkcji  $\gamma(\cdot)$  na interfejsach wyznacza się z zależności:

$$\gamma_p^n = \gamma_{p-1}^n + \eta \varphi_p(x_1^n) \left( \frac{\lambda_{eff}(x_1^n)}{\lambda_p(x_1^n)} - 1 \right), \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

gdzie:  $\varphi_p(\cdot)$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$  - funkcje nasycenia,  $\lambda_{eff}$  - efektywny współczynnik przewodzenia ciepła w  $n$ -tej warstwie kompozytu wyrażony wzorem:

$$\lambda_{eff}(x_1^n) \equiv \left( \frac{\varphi_1(x_1^n)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_P(x_1^n)}{\lambda_P} \right)^{-1}, \quad (3)$$

dodatkowo funkcja  $\gamma(\cdot)$  musi spełniać warunek  $\langle \rho \gamma \rangle(x_1^n) = 0$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością masy, a  $\langle \cdot \rangle(x_1)$  jest uśrednieniem zdefiniowane jako:

$$\langle f \rangle(x_1) \equiv \frac{1}{\eta} \int_{x_1 - \eta/2}^{x_1 + \eta/2} f(z) dz, \quad x_1 \in \left( \frac{\eta}{2}, L_1 - \frac{\eta}{2} \right). \quad (4)$$

W wyniku przeprowadzenia procedury homogenizacji lokalnej, amplitudę fluktuacji temperatury  $\psi(\cdot)$  dla jednowymiarowego, stacjonarnego zagadnienia przewodnictwa ciepła można wyrazić jako funkcję gradientu temperatury  $\vartheta(\cdot)$ :

$$\psi(\mathbf{x}) = - \left\langle \lambda \frac{d}{dx_1} \gamma \right\rangle(x_1) \cdot \left( \left\langle \lambda \left( \frac{d}{dx_1} \gamma \right)^2 \right\rangle(x_1) \right)^{-1} \cdot \partial_1 \vartheta(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Pole uśrednionej temperatury  $\vartheta(\cdot)$  wyznacza się z równania:

$$\frac{d}{dx_1} \left( \left( \lambda_{eff}(x_1) \right) \frac{d}{dx_1} \vartheta(x_1) \right) = 0, \quad (6)$$

gdzie:

$$\lambda_{eff}(x_1) \equiv \left( \frac{\Phi_1(x_1)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\Phi_P(x_1)}{\lambda_P} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Równanie (6) oraz (5) wraz z dekompozycją (1) oraz z zadanymi warunkami brzegowymi stanowi układ równań dla jednowymiarowego, stacjonarnego przewodzenia ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia w kompozycie o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych. Należy podkreślić, że występujący w równaniu (6) współczynnik  $\lambda_{eff}(\cdot)$  wolno zmienia swoje wartości, dzięki czemu równanie to można rozwiązać w analityczny sposób (całkując po zmiennej  $x_1$ ).

#### 4. Przykład

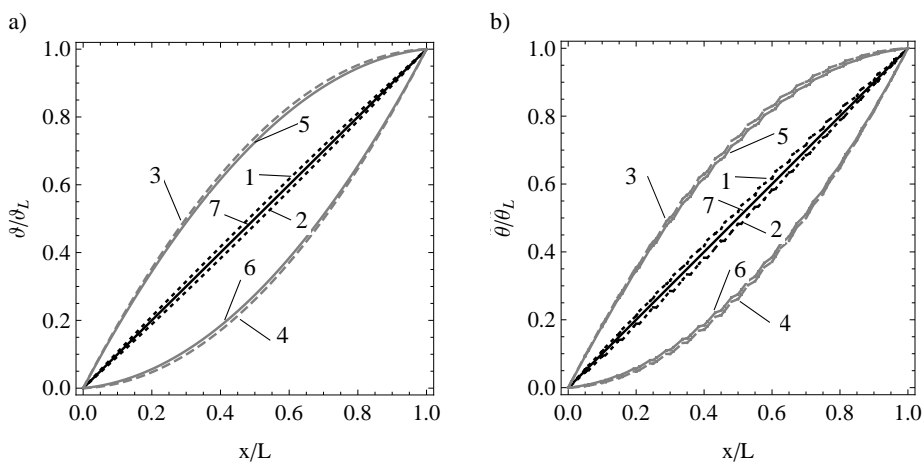
Rozpatrzono pasmo kompozytowe ( $\Omega \equiv (0, L) \times R^2$ ) o grubości  $L$ , które zbudowane jest z  $N=20$  warstw o stałej grubości  $\eta = L/N$ . Wprowadzono oznaczenie  $x \equiv x_1$ . Każda warstwa składa się z trzech podwarstw zbudowanych z różnych jednorodnych i izotropowych materiałów. Funkcje nasycenia w warstwie wynoszą:  $\varphi_1 = 0,2$ ,  $\varphi_2(x) = \frac{L-0,2x}{L} - 0,2$ ,  $\varphi_3(x) = 1 - \frac{L-0,2x}{L}$ . Oznacza to, że grubość pierwszej podwarstwy w każdej warstwie jest stała i równa  $\eta_1 = 0,2\eta$  (ponieważ  $\varphi_1 = const.$ ), natomiast grubości drugiej i trzeciej podwarstwy w kolejnych warstwach różnią się. Rozpatrzono siedem wariantów ułożenia materiałów. W tabeli 1 zamieszczono wartości współczynników przewodzenia ciepła w składnikach warstwy oraz wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla całego pasma kompozytowego w poszczególnych wariantach. Następnie przyjmując warunki brzegowe  $\theta(0) = 0^\circ C$ ,  $\theta(L) = \vartheta_L^\circ C = \tilde{\theta}_L^\circ C > 0^\circ C$ , wyznaczono rozkłady temperatury. Na Rys. 2 przedstawiono rozkłady bezwymiarowych ilorazów  $\vartheta(\cdot)/\vartheta_L$  oraz  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$  w poszczególnych wariantach, natomiast na Rys. 3 przedstawiono rozkłady temperatury  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$  w wybranych warstwach kompozytu.

Tabela 1. Wartości współczynników przewodzenia ciepła

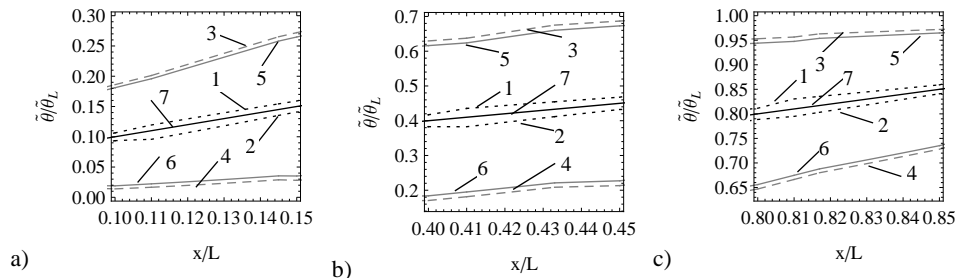
Table 1. Thermal conductivity coefficients

pod-warstwa	wariant						
	1	2	3	4	5	6	7
1	$\lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$
2	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_2 = \lambda_1$
3	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2 = 20 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_3 = \lambda_1$
$\lambda_{eff}$	$4,4643 \cdot \lambda_1$	$4,4643 \cdot \lambda_1$	$2,4155 \cdot \lambda_1$	$2,4155 \cdot \lambda_1$	$2,3697 \cdot \lambda_1$	$2,3697 \cdot \lambda_1$	$\lambda_1$

Rozkłady temperatury  $\vartheta(\cdot)/\vartheta_L$  są gładkie, natomiast rozkłady  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$  charakteryzują się „zabkami” wynikającymi z uwzględnienia niejednorodnej budowy struktury kompozytowej (por. wzór (1)).

Rys. 2. Rozkład temperatury a)  $\vartheta(\cdot)/\vartheta_L$ , b)  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$ . Linie 1÷7 poszczególne wariantyFig. 2. The temperature distribution a)  $\vartheta(\cdot)/\vartheta_L$ , b)  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$ . Lines 1÷7 individual variants

Wyniki pokazane na Rys. 2a i 2b pokazują, że w przypadku trójskładnikowego pasma kompozytowego, przy zachowaniu tej samej wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla całego pasma, można tak zmieniać ułożenie podwarstw, że w strefie przybrzegowej od strony zewnętrznej lub wewnętrznej otrzymuje się duże lub małe gradienty temperatury (por. wariant 1 i 2, 3 i 4, 5 i 6).



Rys. 3. Rozkłady temperatury  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$  w warstwie a) trzeciej, b) dziewiątej c) trzynastej. Linie 1÷7 odpowiadają poszczególnym wariantom

Fig. 3. Distribution of temperature  $\tilde{\theta}(\cdot)/\tilde{\theta}_L$  in a) the third b) the ninth c) thirteenth, layer. Lines 1÷7 correspond to individual variants

Siódmy z rozpatrywanych wariantów, dla którego  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , pokazuje, że w ramach modelu homogenizacji lokalnej istnieje przejście z niejednorodnego układu do struktury jednorodnej.

## 5. Podsumowanie

Model homogenizacji lokalnej dla zagadnienia przewodzenia ciepła w wieloskładnikowym, wielowarstwowym kompozycie o poprzecznej gradacji właściwości efektywnych pozwala zastąpić nieciągłe współczynniki w równaniu przewodzenia ciepła, współczynnikami, które są gładkie. Otrzymane równania można rozwiązać dla pewnych szczególnych przypadków nawet w sposób analityczny. Na podstawie przedstawionego przykładu można powiedzieć, że na rozkład temperatury wpływa niejednorodna budowa analizowanej struktury. Rozkład temperatury zależy od funkcji nasycenia, co daje możliwość projektowania struktury kompozytowej, tak, aby realizowany był zadany z góry rozkład temperatury. W zależności od potrzeb możliwy jest taki dobór układu podwarstw struktury kompozytowej, aby uzyskać od strony zewnętrznej lub wewnętrznej w strefie przybrzegowej bardzo małe albo bardzo duże gradienty uśrednionej temperatury. Może to mieć znaczenie np. w produkcji urządzeń do przechowywania materiałów spożywczych wymagających odpowiednich warunków termicznych (komory chłodnicze do przechowywania owoców, warzyw); w przemyśle motoryzacyjnym do produkcji osłon silników.

## Literatura

- [1] Jędrzyśiak J., Radzikowska A.: Tolerance averaging of heat conduction in transversally graded laminates, *Meccanica (AIMETA)*, nr 47(1), 2012, s. 95-107.

- [2] Michalak B., Woźniak M., Woźniak Cz., Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductor, Arch. Appl. Mech., 77, 2007, s. 823-834.
- [3] Szlachetka O., Wągrowska M.: Distribution of temperature in multicomponent functionally graded multilayered composites, Acta Sci. Polon., Ser. Architectura, nr 15 (1), 2016, s. 27-39.
- [4] Woźniak Cz., Wierzbicki E.: Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Tolerance averaging versus homogenization, Wydaw. PCz, Częstochowa 2000.
- [5] Woźniak Cz., Michalak B., Jędrzyński J. (red.): Thermomechanics of heterogeneous solids and structures, tolerance averaging approach, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
- [6] Woźniak Cz. i inni, (red.): Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [7] Woźniak Cz., Wągrowska M., Szlachetka O.: Asymptotic modelling and design of some microlayered functionally graded heat conductors, ZAMM, 92, nr 10, 2012, s. 841-848.
- [8] Woźniak Cz., Wągrowska M., Szlachetka O.: On the tolerance modelling of heat conduction in functionally graded laminated media, J. Appl. Mech. Tech. Phys., nr. 56 (2), 2010, s. 274-281.

## DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN MULTICOMPONENT MULTILAYERED COMPOSITE WITH TRANSVERSAL GRADATION OF EFFECTIVE PROPERTIES

### Summary

The object of analysis was one-dimensional, stationary problem of heat conduction problem in direction perpendicular to layers within the frames of asymptotic variant of tolerance modelling in multicomponent, multilayered composites with transversal gradation of effective material properties. The influence of the composite microstructure on the temperature distribution was investigated. It has been shown that inhomogeneous structure of the considered construction influences for the gradient of micro-temperature in the zone close to the surfaces.

**Keywords:** heat conduction, tolerance modelling, transversal gradation

*Przesłano do redakcji: 07.06.2016 r.*

*Przyjęto do druku: 30.06.2016 r.*

DOI: 10.7862/rb.2016.7