

Roman KADAJ¹

UKŁADY ODNIESIENIA PL-ETRF89, PL-ETRF2000 I RELACJE MIĘDZY NIMI

Nowy układ odniesienia PL-ETRF2000, reprezentowany przez stacje systemu ASG-EUPOS, został wprowadzony do zastosowań formalnie Rozporządzeniem RM z 2012 r., jakkolwiek współrzędne stacji w tym układzie udostępniono dopiero w lipcu 2013r. Ze względu na powszechne korzystanie z serwisów ASG-EUPOS, ważną kwestią stają się relacje pomiędzy nowym układem a istniejącym układem PL-ETRF89, który ma już w Polsce ponad 20-letnią historię – stosowany prawie we wszystkich „produktach” geodezyjno-kartograficznych. W zależności od zastosowania, wspomniane relacje mogą mieć charakter „teoretyczny”, wyrażony przez transformację konforemą (7-mio parametrową) lub „empiryczny”, oparty na siatce interpolacyjnej, która pozwala uwzględnić dodatkowo lokalne deformacje układu PL-ETRF89. Do tego ostatniego zadania, oprócz punktów sieci POLREF możliwe stało się wykorzystanie wyników nowego wyrównania dawnej sieci I klasy w układzie PL-ETRF2000. Po wprowadzeniu nowego układu odniesienia PL-ETRF2000 wystąpiła potrzeba skalibrowania modeli quasi-geoidy (anomalii wysokości) na nowe wysokości elipsoidalne. W użyciu praktycznym, chodzi o to, by niwelacja satelitarna wykonywana przy wykorzystaniu serwisów systemu ASG-EUPOS i modelu quasi-geoidy dawała wysokości normalne w układzie PL-KRON86-NH bez przesunięcia systematycznego. W pracy przedstawiono założenia i wyniki estymacji parametrów transformacji konforemnej pomiędzy układami, wskazując na potrzebę zastosowania tych formuł w przypadku integracji obiektów pochodzących z różnych układów odniesienia.

Słowa kluczowe: układ odniesienia, system ASG-EUPOS, parametry transformacji

1. Wprowadzenie

Na podstawie (już nieaktualnego) Rozporządzenia RM z roku 2000 w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych [11], od roku 2009 w Polsce obowiązywał europejski układ odniesienia, zwany w skrócie ETRF’89 (*European Terrestrial Reference Frame* na epokę 1989) z elipsoidą odniesienia GRS80 (*Geodetic Reference System* ’1980). Układ ten zastępował poprzedni układ odniesienia w systemie PUŁKOWO’42 z elipsoidą Krasowskiego, obo-

¹ Autor do korespondencji: Roman Kadaj, Politechnika Rzeszowska, ul. Poznańska 2, 35-959, Rzeszów, tel. +48 178651306, geonet@geonet.net.pl

wiązujący od czasów powojennych w państwach byłego bloku wschodniego. Wytworem dawnego układu w Polsce były wszystkie użytkowe opracowania geodezyjno-kartograficzne, w tym osnowy geodezyjne oraz mapy gospodarcze, wykonywane najpierw w układzie odwzorowawczym „1942” (odwzorowanie *Gaussa-Kruger*a w pasach 3° lub 6°), a następnie w układzie „1965” (4 strefy z odwzorowaniem quasi-stereograficznym i 1 strefa z odwzorowaniem *Gaussa-Kruger*a).

Jak wiadomo, każdy funkcjonujący układ odniesienia jest reprezentowany w pierwszej kolejności przez pewne pierwotne (bazowe, podstawowe) osnowy geodezyjne, zagęszczane następnie hierarchicznie przez osnowy niższych rzędów. Tak na przykład dawny układ odniesienia był reprezentowany przez osnowę podstawową (I klasy) złożoną z sieci astronomiczno-geodezyjnej i triangulacji wypełniającej (w sumie ok. 6500 punktów, a następnie przez osnowy szczegółowe, klasy II (w sumie ok. 65000 punktów) i III oraz, najniżej w hierarchii, przez osnowy pomiarowe i pomiary sytuacyjne. Niedoskonałość ówczesnych (z lat 50–70-tych) technik pomiarowych i obliczeniowych sprawiła, że realizację układu odniesienia w sensie wyznaczeń współrzędnych punktów były obciążone istotnymi błędami systematycznymi (dochodzącymi w wymiarze liniowym do 90 cm), identyfikowanymi obecnie w formie niezależnych modeli błędów dla poszczególnych stref układu „1965”. Efekt ten nazywamy błędem globalnym układu odniesienia. W okresie funkcjonowania systemu PULKOWO'42 błąd globalny nie był możliwy do identyfikacji, gdyż nie pozwalały na to ówczesne lokalne (względne) metody pomiarowe. Dodatkowym utrudnieniem była niejawność podstawowych informacji metrycznych dotyczących stosowanych odwzorowań i układów współrzędnych.

Rozwój satelitarnych technik pozycjonowania (obecnie już bezpośrednio w zdefiniowanym układzie odniesienia bez hierarchicznego korzystania z osnow) wymusił niejako nowe wymagania jakościowe dotyczące definicji i samej precyzji realizacji układu odniesienia. W związku z tym, już od początku stosowania technik satelitarnych powstawały projekty nowych układów odniesienia.

W celu wprowadzenia, europejskiego układu odniesienia już w pierwszej połowie lat 90-tych założono w obszarze Polski, satelitarne sieci EUREF-POL (11 punktów) oraz POLREF (ok. 340 punktów). Wiążąc te sieci z europejskimi stacjami satelitarnymi wyznaczono współrzędne wszystkich punktów w układzie europejskim ETRF'89. Jakkolwiek pierwotnie szacowany błąd położenia punktu tych sieci miał wynosić ok. 2.5 cm to późniejsze analizy dokładności położenia wykazały, że w całym zbiorze punktów występują lokalne elementy odstające oraz systematyczne przesunięcie pionowe układu (średnio ok. 7 cm) względem faktycznego układu europejskiego, reprezentowanego wówczas przez 24 stacje bazowe. Sieci EUREF-POL + POLREF traktujemy więc tylko jako polskie realizacje układu europejskiego i zgodnie z nomenklaturą przyjętą nowym rozporządzeniem RM z roku 2012 w sprawie państwowego systemu od-

niesień przestrzennych [10], tworzony przez nie układ odniesienia nazwano PL-ETRF89. Pomimo pewnych jakościowych niedoskonałości, do układu PL-ETRF89, a w szczególności do związanego z tym układu kartograficznego PL-2000 przekonwertowano już prawie cały zasób geodezyjno-kartograficzny, w tym osnowy wszystkich klas i mapy gospodarcze. Do tego celu posłużyły związki transformacyjne pomiędzy układami, które opublikowano w formie Wytycznych Technicznych G-1.10 [4].

Od roku 2008 pojawia się w polskiej geodezji nowy produkt technologiczny w postaci systemu ASG-EUPOS. Stacje tego systemu wyznaczone w ramach kampanii pomiarowej (2008-2011) z wysoką, kilkumilimetrową dokładnością tworzą (definiują) nowy jakościowo układ odniesienia, który według [10] nazywamy PL-ETRF2000. Serwisy precyzyjnego pozycjonowania w ASG-EUPOS (w szczególności POZGEO-D) umożliwiają zakładanie osnow geodezyjnych z wysoką dokładnością bezwzględną, przekładającą się na odpowiednią dokładność wewnętrzną (względna) oczekiwaną ongiś w sieciach realizacyjnych. Jakkolwiek bezpośrednia integracja danych pomiarowych lub punktów nawiazania pomiędzy układami PL-ETRF2000 i PL-ETRF89 nie jest jednak wskazana, nie tylko ze względu na różne dokładności realizacji układów, ale także pewne odchylenia systematyczne zwłaszcza w zakresie wysokości elipsoidalnych (dokładniej będzie o tym mowa w dalszej części niniejszej publikacji).

Dla różnych zadań związanych z wykorzystaniem serwisów ASG-EUPOS w obszarze osnow lub obiektów kartograficznych wyznaczonych wcześniej w układzie PL-ETRF89 istniała konieczność sformułowania związku transformacyjnego pomiędzy układami. Chodzi tutaj o parametry transformacji przestrzennej, które powinny być estymowane w oparciu o dane punkty dostosowania, jak to uczyniono w roku 2000 w odniesieniu do układów: ETRF89 i PUŁKOWO'42. W tym celu, w ramach kampanii pomiarowej (2008-2011) wykonano pomiary wiążące stacje ASG-EUPOS z osnowami podstawowymi (sieci EUREF-POL + POLREF oraz wybrane punkty dawnej I klasy). Obliczenia sieci były wykonane niezależnie przez dwa zespoły naukowe: Politechniki Warszawskiej (WUT) [7] i CBK [2]. Formalnie jako rozwiązanie użytkowe przyjęto wariant pierwszy (WUT), jakkolwiek wyniki dwóch rozwiązań były do siebie bardzo zbliżone, co ilustruje uproszczona statystyka porównawcza dla punktów położonych w obszarze Polski:

Ekstremalne wartości różnic współrzędnych (WUT – CBK):

$$\begin{array}{lll} dX_{\min} = -0.008 & dY_{\min} = -0.011 & dZ_{\min} = -0.005 \\ dX_{\max} = 0.009 & dY_{\max} = 0.007 & dZ_{\max} = 0.011 \end{array}$$

Przeciętne wartości różnic współrzędnych (WUT – CBK):

$$dX_{\text{śr}} = -0.001 \quad dY_{\text{śr}} = 0.000 \quad dZ_{\text{śr}} = -0.000$$

Odchylenia średniokwadratowe (WUT-CBK):

$$s_x = 0.002 \quad s_y = 0.001 \quad s_z = 0.002$$

W zakresie samych wysokości elipsoidalnych, odchylenia pomiędzy rozwiązaniami WUT i CBK, są następujące:

wartość najmniejsza	-0.0100
wartość największa	0.0126
wartość średnia	-0.0003
wartość średniokwadratowa	0.0025

Porównywalność (zgodność) dwóch niezależnych rozwiązań sieci satelitarnych ma też znaczenie niezawodnościowe obejmujące etap przetwarzania danych, w tym skomplikowanych obliczeń dotyczących identyfikacji całkowitych nieoznaczoności (*ambiguities*).

Na podstawie cytowanych opracowań [1] można stwierdzić, że wyznaczone współrzędne punktów charakteryzują się wysoką, milimetrową dokładnością względem pewnego stanu „średniego” reprezentowanego przez stacje EPN w układzie ETRF2000 na epokę obserwacji 2011.0. Można postulować, by ten stan układu PL-ETRF2000 był odniesieniem dla wszelkich produktów geodezyjnych opartych na pozycjonowaniu satelitarnym, przynajmniej w okresie najbliższych 20 lat. Istotne ruchy własne stacji powinny być traktowane jako indywidualne zmiany położenia w pierwotnym układzie „średnim” odniesionym do polskich stacji EPN i traktowanym jako układ quasi-stały. W związku z tym, okresowy monitoring stacji powinien być opracowany numerycznie i statystycznie, przy założeniu dla wszystkich stacji EPN, zerowości średniego przemieszczenia, średniego obrotu i niezmienności skali, czyli kryteriów stosowanych w uogólnionej odwrotności *Moore'a-Penrose'a*. Rezydualne ruchy własne stacji ASG-EUPOS względem określonego stanu quasi-stałego powinny być sukcesywnie publikowane w formie poprawek do współrzędnych.

Celem niniejszej publikacji jest przedstawienie zadania estymacji parametrów transformacji pomiędzy układami PL-ETRF89 i PL-ETRF2000 w aspekcie założeń, wyników i zobrazowania skutków metrycznych (niektóre szczególnie interpretacje podano w referacie konferencyjnym [5]). Ważnym zastosowaniem jest odpowiednie skorygowanie anomalii wysokości w używanych modelach quasi-geoidy, ze względu na zmianę wysokości elipsoidalnych – w układzie PL-ETRF2000 zdefiniowano anomalie modelu quasi-geoidy PL-geoid-2011 [3, 5].

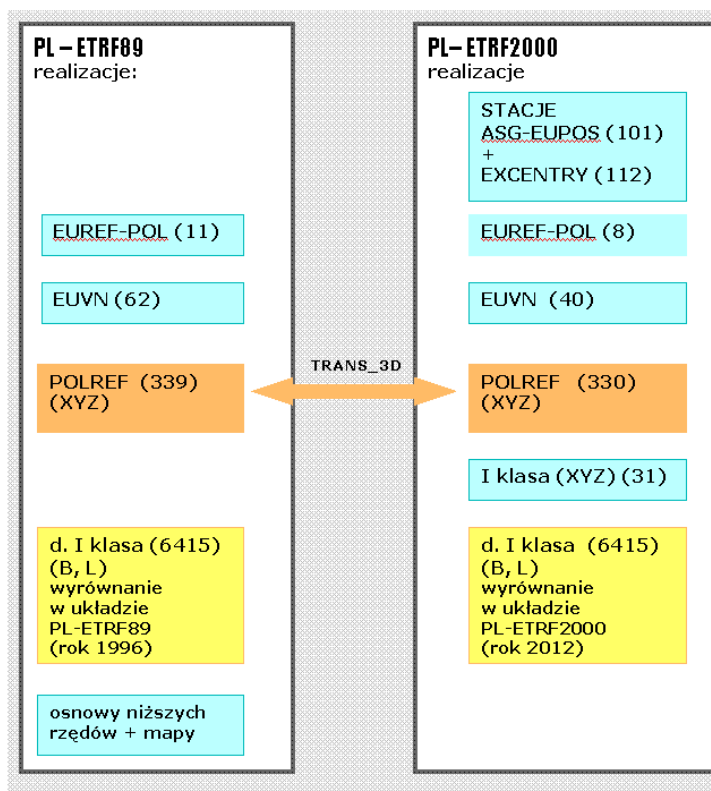
2. Wyznaczenie parametrów transformacji PL-ETRF89 <=> PL-ETRF2000

2.1. Zbiory punktów reprezentujące układy odniesienia, w tym podzbiory punktów dostosowania

W zbiorze punktów dostosowania do wyznaczenia parametrów trójwymiarowej transformacji pomiędzy układem PL-ETRF89 i PL-ETRF2000 uwzględniono jedynie 330 punktów sieci POLREF objętych zarówno pomiarem pierwotnym (w układzie PL-ETRF89) jak też pomiarem aktualnym (w ramach

kampanii 2008-2011) z wyznaczeniem współrzędnych w układzie PL-ETRF2000. W obu przypadkach były to współrzędne kartezjańskie (X,Y,Z) lub (równoważnie) przeliczone na współrzędne geodezyjne (B,L,h) elipsoidy GRS80. W zbiorze punktów dostosowania do transformacji nie uwzględniono punktów sieci EUREF-POL i EUVN (pomimo ich pomiaru w kampanii 2008-2011), ponieważ jak wynika z wielu analiz, punkty tych sieci zostały wyznaczone pierwotnie w układach niespójnych z układem sieci POLREF, która jest przyjęta umownie jako sieć realizująca hierarchiczne rozwinięcie układu PL-ETRF89 (w oparciu o sieć POLREF nastąpiło wyrównanie dawnej sieci I klasy, a w dalszej kolejności także sieci klas niższych).

Na rys. 1 przedstawiono symbolicznie rodzaje sieci reprezentujące zasadniczo interesujące nas układy odniesienia. Strzałki oznaczają, że punkty dostosowania w liczbie 330 sieci POLREF posłużyły do estymacji parametrów transformacji trójwymiarowej (z pierwotnej liczby 339 punktów wykluczono 9 punktów, które albo nie były objęte nowym pomiarem albo uległy uszkodzeniom lub identyfikowalnym przemieszczeniom).



Rys. 1. Sieci reprezentujące dwa układy odniesienia

Fig. 1. Networks representing two reference frames

Specjalną uwagę należy zwrócić na funkcjonalność punktów dawnej sieci I klasy. Otóż sieć ta zawierająca w sumie 6415 punktów, rozłożonych równomiernie w obszarze Polski została niezależnie wyrównana zarówno w układzie PL-ETRF89 (w roku 1996), jak też 16 lat później w układzie PL-ETRF2000 (w roku 2012). Niestety, sieć ta dostarcza jedynie współrzędnych elipsoidalnych B, L, bez wysokości, czyli jako sieć dwuwymiarowa. Dlatego, pomimo znacznej ilości punktów, nie mogła być użyta do transformacji trójwymiarowej. Została natomiast wykorzystana do zrealizowania tzw. transformacji empirycznej pomiędzy reprezentacjami samych układów dwuwymiarowych, w tym układów odwzorowawczych w formie tzw. siatek interpolacyjnych. Idea metodologii transformacji empirycznej z wykorzystaniem siatki interpolacyjnej została przedstawiona w opisie programu TRANSPOL w. 2.06 [6] będącym publicznie dostępnym narzędziem dla realizacji konwersji współrzędnych i wysokości pomiędzy różnymi układami w państwowym systemie odniesień przestrzennych.

Do wyznaczenia parametrów transformacji przestrzennej w oparciu o dany zbiór 330 punktów dostosowania użyto programu TRANS_3D w systemie GEONET. W programie tym możemy wybierać opcjonalnie różne modele transformacji przestrzennej. Wiadomo, że geocentryczne układy odniesienia są z założenia układami orto-kartezjańskimi. Ponadto w technologiach obserwacyjnych dąży się do zachowania ich izometrii, co jest związane z precyzją pomiaru czasu i definicją miary długości. Dlatego uzasadnione jest założenie, by w przedmiocie transformacji pomiędzy różnymi geocentrycznymi układami odniesienia przyjmować model matematyczny transformacji konforemnej (7-mio parametrowej).

2.2. Zastosowane modele matematyczne transformacji

Szczególne formuły trójwymiarowej transformacji konforemnej (7-mio parametrowej) pomiędzy układami wywodzą się z ogólnego modelu takiej transformacji, który w notacji macierzowej możemy wyrazić w postaci:

$$\underline{X}_2 - \Delta_2 = m \cdot \mathbf{S} \cdot (\underline{X}_1 - \Delta_1) \quad (1)$$

gdzie: $\underline{X}_1 = [X_1, Y_1, Z_1]^T$, $\underline{X}_2 = [X_2, Y_2, Z_2]^T$ znaczą wektory współrzędnych w odpowiednich układach: pierwotnym i aktualnym (tu podstawiamy konkretne nazwy układów), m - współczynnik zmiany skali układu pierwotnego względem układu aktualnego, \mathbf{S} - (3×3) macierz obrotów, której elementy są funkcjami 3 kątów obrotów układu pierwotnego wokół kolejnych osi, Δ_1 , Δ_2 - wektory przesunięć początków układów (odpowiednio), które można zastąpić jednym wektorem (wypadkowym):

$$\Delta = \Delta_2 - m \cdot \mathbf{S} \cdot \Delta_1 \quad (2)$$

Wobec zależności (2) model transformacji (1) zapisujemy też w postaci:

$$\underline{X}_2 = \underline{\Delta} + m \cdot \underline{S} \cdot \underline{X}_1 \quad (3)$$

Wektor wypadkowy $\underline{\Delta}$ wyraża przemieszczenie wzajemne początków układów po sprowadzeniu drugiego do równoległości osi i izometrii z układem wtórnym. Zgodnie z (2), wektor $\underline{\Delta}$ może być złożeniem dwóch wektorów wzajemnie zależnych w tym sensie, że jeśli założymy dowolne przesunięcie $\underline{\Delta}_1$ układu pierwotnego, to dla określonego przesunięcia wypadkowego $\underline{\Delta}$, przesunięcie układu wtórnego $\underline{\Delta}_2$ będzie wynikać ściśle z powołanej zależności.

Formuła (1) lub (3) jako model transformacji konforemnej charakteryzuje się tym, że macierz \underline{S} jest macierzą ortonormalną, czyli spełniającą warunek:

$$\underline{S}^T \cdot \underline{S} = \underline{I} \text{ (macierz jednostkowa), } \underline{S}^{-1} = \underline{S}^T \quad (4)$$

Jeśli w ogólności macierz $\underline{S} = [s_{ij}]_{(3 \times 3)}$ ma 9 elementów to zgodnie z (2) elementy te spełniają 6 warunków ortonormalności (jednostkowe długości i prostopadłości wektorów wierszowych lub kolumnowych macierzy):

$$\begin{aligned} s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 &= 1 \\ s_{21}^2 + s_{22}^2 + s_{23}^2 &= 1 \\ s_{31}^2 + s_{32}^2 + s_{33}^2 &= 1 \\ s_{11} \cdot s_{21} + s_{12} \cdot s_{22} + s_{13} \cdot s_{23} &= 0 \\ s_{11} \cdot s_{31} + s_{12} \cdot s_{32} + s_{13} \cdot s_{33} &= 0 \\ s_{21} \cdot s_{31} + s_{22} \cdot s_{32} + s_{23} \cdot s_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Zatem wszystkie elementy macierzy możemy wyrazić w funkcji tylko 3 (9–6) parametrów. W typowych zastosowaniach modelu transformacji przyjmuje się, że niezależnymi parametrami są 3 kąty obrotów osi układu pierwotnego w celu uzyskania efektu równoległości z osiami układu wtórnego. Funkcje te są ogólnie znane ale nie będziemy w nie wnikać, ponieważ do numerycznego rozwiązania zadań estymacji parametrów wystarczy posłużyć się ogólnymi warunkami (3). Tak też zadanie zostało zaimplementowane w użyтым programie TRANS_3D. Trzeba jednak dodać, że tak sformułowany model kreuje zadanie estymacji jego parametrów jako nieliniowe zadanie najmniejszych kwadratów, a wynika to wprost z nieliniowej postaci warunków (3).

Przedstawiony model transformacji konforemnej jest określony przez 7 parametrów (3 składowe wektora translacji, 3 parametry obrotów osiowych, 1 parametr zmiany skali). W przypadku założenia niezmienności skali ($m = 1$) ilość parametrów modelu redukuje się do 6, a transformację nazywamy izometryczną.

W przypadku, gdy układ pierwotny i układ aktualny są zbliżone do siebie, jak to mamy na przykład w różno-epokowych w układach geocentrycznych w systemie międzynarodowym (ITRS – *International Terrestrial Reference*

System) lub europejskim (ETRS – *European Terrestrial Reference System*), model transformacji konforemnej w postaci (1) lub (3) przekształca się do postaci jeszcze dogodniejszej pod względem numerycznym. Model taki uwzględnia cechy zbioru punktów dostosowania, który jest podstawą estymacji parametrów modelu. Są to współrzędne środków ciężkości zbiorów tych punktów w dwóch układach.

Oznaczmy:

$$\underline{\mathbf{X}}_{S1} = [X_{S1}, Y_{S1}, Z_{S1}]^T, \underline{\mathbf{X}}_{S2} = [X_{S2}, Y_{S2}, Z_{S2}]^T \quad (6)$$

wektory współrzędnych środków ciężkości obliczone odpowiednio w układzie pierwotnym i aktualnym dla zbioru n punktów dostosowania. Jak się wykazuje w estymacji parametrów modelu (1) metodą najmniejszych kwadratów, szczególną postacią tego modelu jest formuła:

$$\underline{\mathbf{X}}_2 - \underline{\mathbf{X}}_{S2} = m \cdot \mathbf{S} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_{S1}) \quad (7)$$

z której wynika, że parametry przesunięcia w tej postaci są wyznaczone niezależnie od parametrów obrotu i skali. Wstawiając więc obliczone niezależnie współrzędne środków ciężkości, mamy do wyznaczenia już tylko 4 parametry (3 parametry obrotów + 1 parametr skali). Wprowadźmy ponadto pomocniczą macierz \mathbf{C} przez podstawienie w (7):

$$\mathbf{I} + \mathbf{C} = m \cdot \mathbf{S} \quad \text{lub} \quad \mathbf{C} = m \cdot [\mathbf{S} - (1/m) \cdot \mathbf{I}] \quad (8)$$

Stąd otrzymujemy formułę różnicową transformacji, adekwatną dla określonego obszaru, reprezentowanego przez środki (6):

$$\underline{\mathbf{X}}_2 = \underline{\mathbf{X}}_1 + \boldsymbol{\delta} + \mathbf{C} \cdot \underline{\Delta\mathbf{X}} \quad (9)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\delta} = \underline{\mathbf{X}}_{S2} - \underline{\mathbf{X}}_{S1} \quad (10)$$

wektor różnic współrzędnych środków ciężkości (mierzy średnie przesunięcie wzajemne układów),

$$\underline{\Delta\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_{S1} \quad (11)$$

wektor przyrostów współrzędnych pierwotnych względem współrzędnych środka ciężkości.

Formułę typu (9) będziemy stosować w naszym zadaniu transformacji pomiędzy konkretnymi układami odniesienia. Posiłkując się już „na wyrost” wynikami z tabeli 1 zauważmy, że ostatni człon formuły (9), w całym obszarze Polski (przy odległości od środka obszaru nawet 500 km) daje wartości co naj-

wyżej kilkucentymetrowe. Po wtóre zauważmy, że składowe wektora ΔX mogą być zaokrąglone do 1 km nie powodując zmian wynikowych współrzędnych więcej niż 0.0001 m.

Jeśli w formule (3) wstawimy zależność (8), to otrzymamy model transformacji globalnej nie wykorzystujący pojęcia lokalnego środka ciężkości:

$$\underline{X}_2 = \underline{X}_1 + \Delta + C \cdot \underline{X}_1 \quad (12)$$

gdzie parametr przesunięcia Δ ma interpretację taką jak we wzorze (3).

2.3. Estymowane parametry i formuły numeryczne transformacji PL-ETRF89 \Leftrightarrow PL-ETRF2000

W wyniku wykonania zadania otrzymano wartości parametrów transformacji, zapisane w dwóch równoważnych formułach przekształcenia (tab.1):

- pierwsza (różnicowa) z użyciem współrzędnych środka ciężkości zbioru punktów dostosowania w obu układach, adekwatna dla transformacji lokalnych (9),
- druga, będąca równoważnym przekształceniem pierwszej (stosowana w transformacjach globalnych) (12).

Tabela 1. Estymowane parametry i formuły transformacji

Table 1. The estimated parameters and the transformation formulas

TRANSFORMACJA: PL-ETRF89 \Rightarrow PL-ETRF2000

Formuła różnicowa

```
X2=X1+(-0.0322)+(-0.00000005102)*DX+(-0.00000000746)*DY+(0.00000004804)*DZ;
Y2=Y1+(-0.0347)+(0.00000000746)*DX+(-0.00000005102)*DY+(0.00000006152)*DZ;
Z2=Z1+(-0.0507)+(-0.00000004804)*DX+(-0.00000006152)*DY+(-0.00000005102)*DZ;
DX = X1-XS1;   DY = Y1-YS1;   DZ = Z1-ZS1;
XS1 = 3696570.6591;   YS1 = 1297521.5905;   ZS1 = 5011111.1273;
```

Formuła dla transformacji globalnych

```
X2=X1+(-0.0747)+(-0.00000005102)*X1+(-0.00000000746)*Y1+(0.00000004804)*Z1
Y2=Y1+(-0.3044)+(0.00000000746)*X1+(-0.00000005102)*Y1+(0.00000006152)*Z1
Z2=Z1+(0.4624)+(-0.00000004804)*X1+(-0.00000006152)*Y1+(-0.00000005102)*Z1
```

TRANSFORMACJA ODWROTNA: PL-ETRF2000 \Rightarrow PL-ETRF89

Formuła różnicowa

```
X2=X1+(0.0322)+(0.00000005102)*DX+(0.00000000746)*DY+(-0.00000004804)*DZ;
Y2=Y1+(0.0347)+(-0.00000000746)*DX+(0.00000005102)*DY+(-0.00000006152)*DZ;
Z2=Z1+(0.0507)+(0.00000004804)*DX+(0.00000006152)*DY+(0.00000005102)*DZ;
DX = X1-XS1;   DY = Y1-YS1;   DZ = Z1-ZS1;
XS1 = 3696570.6268;   YS1 = 1297521.5559;   ZS1 = 5011111.0767;
```

Formuła dla transformacji globalnych

```
X2=X1+(0.0747)+(0.00000005102)*X1+(0.00000000746)*Y1+(-0.00000004804)*Z1
Y2=Y1+(0.3044)+(-0.00000000746)*X1+(0.00000005102)*Y1+(-0.00000006152)*Z1
Z2=Z1+(-0.4624)+(-0.00000004804)*X1+(0.00000006152)*Y1+(0.00000005102)*Z1
```

Dokładność wyznaczonych modeli transformacji charakteryzują odchyłki na punktach dostosowania, które są głównie wynikiem błędności współrzędnych w układzie PL-ETRF89. Nie można jednak wykluczyć, że pomiędzy różnymi epokami pomiarowymi nastąpiły przemieszczenia (osiadania) niektórych punktów sieci.

Średniokwadratowe odchyłki współrzędnych przyjmują następujące wartości:

$$s_X = 0.011\text{m}, \quad s_Y = 0.008\text{m}, \quad s_Z = 0.013\text{m}$$

co daje wartość wypadkową 0.019m. W tabeli 2 podano natomiast liczebności odchyłek w różnych przedziałach ich wartości.

Tabela 2. Przedziałowe liczebności odchyłek

Table 2. The interval number of deviations

Przedział [cm]	n_i punktów	frakcja w %
< 0 - 1 cm >	106	32%
(1 - 2 cm >	140	75%
(2 - 3 cm >	56	92%
(3 - 4 cm >	19	97%
(4 - 5 cm >	3	98%
(5 - 6 cm >	5	99.6%
6,6 cm	1	100%

Analiza statystyczna odchyłek transformacji (poprawek do współrzędnych transformowanych) wskazuje, że mają one rozkład empiryczny zbliżony do modelu trójwymiarowego rozkładu normalnego. Tylko dla frakcji ok. 3% następuje przekroczenie podwójnej wartości szacowanego dla sieci POLREF błędu położenia, tj. ok. 2cm.

Można oczywiście dokonywać różnych wykluczeń w zbiorze punktów dostosowania odwołując się do wielkości otrzymywanych z transformacji residuów, lecz nie czyniono tego z następujących względów:

- biorąc pod uwagę relatywnie niewielką - jak na lata 90-te dokładność pomiarów i opracowań sieci (pozycjonowania GPS), określoną błędem standardowym położenia punktu na ok. 2 cm, można zauważyć, że otrzymany empiryczny rozkład poprawek w istocie nie wykracza poza ten standard. Błędy prawdziwe współrzędnych większe od 2 cm, mają prawo pojawić się, zgodnie z modelem prawdopodobieństwem błędu przypadkowego. W kompletnym zbiorze 330 punktów dostosowania tylko 6 wykazuje maksymalne bezwzględne wartości odchyłek współrzędnych od 4,0 do 4,7 cm.
- wykluczenie niewielkiej liczby punktów nie spowoduje istotnej zmiany parametrów i wyników transformacji, zaś wykluczenie większej ich liczby nie ma uzasadnienia przyczynowego i mogłoby zdeformować rzeczywiste relacje pomiędzy układem PL-ETRF89 a nowym układem PL-ETRF2000.

3. Przybliżone relacje poziome i wysokościowe między układami

Przekształcając współrzędne kartezjańskie w obu układach $(XYZ)_{\text{PL-ETRF89}}$ oraz $(XYZ)_{\text{PL-ETRF2000}}$ na odpowiadające współrzędne geodezyjne $(BLH)_{\text{PL-ETRF89}}$ i $(BLH)_{\text{PL-ETRF2000}}$ możemy określić empiryczne związki pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi obu układów. Przekształcając następnie współrzędne geodezyjne B, L w obu układach odniesienia na współrzędne płaskie (XY), określimy analogiczne zależności w poziomie.

Syntetyczne wyniki wykonanych przekształceń można ująć następująco: pomiędzy współrzędnymi płaskimi xy_{92} (według definicji PL-1992) wyznaczonymi niezależnie w układach odniesienia PL-ETRF89 i PL-ETRF2000 zachodzą następujące przybliżone zależności liniowe:

$$\begin{aligned}x_{92}(2) &= x_{92}(1) + dx \\y_{92}(2) &= y_{92}(1) + dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dx &= (0.0017) + (-0.00000004052) \cdot p + (-0.00000001992) \cdot q \\dy &= (-0.0218) + (0.00000001992) \cdot p + (-0.00000004052) \cdot q\end{aligned}$$

gdzie:

$$p = x_{92} - 478097, \quad q = y_{92} - 523344 \quad [\text{m}]$$

są to przyrosty współrzędnych względem przybliżonego środka układu (mogą być zaokrąglone do metra), indeks (1) oznacza układ PL-ETRF89, zaś (2) układ PL-ETRF2000.

Z powyższego wynika, że „średni” wektor przesunięcia to $(0.001\text{m}, -0.022\text{m})$ ale w całym obszarze Polski różnice współrzędnych płaskich mogą się zmieniać w następujących przedziałach:

$$\begin{aligned}dx: &< -0.044\text{m}, 0.029\text{m} > \\dy: &< -0.051\text{m}, 0.020\text{m} >\end{aligned}$$

Dla mniejszych obszarów można posłużyć się wartościami średnimi określonymi z powyższych wzorów.

Różnice wysokości elipsoidalnych w układach PL-ETRF89 i PL-ETRF2000 określają się natomiast wzorem:

$$\begin{aligned}H_{el}(2) &= H_{el}(1) + dH \\dH &= (-0.0661) + (0.00000006575) \cdot p + (-0.00000004170) \cdot q\end{aligned}$$

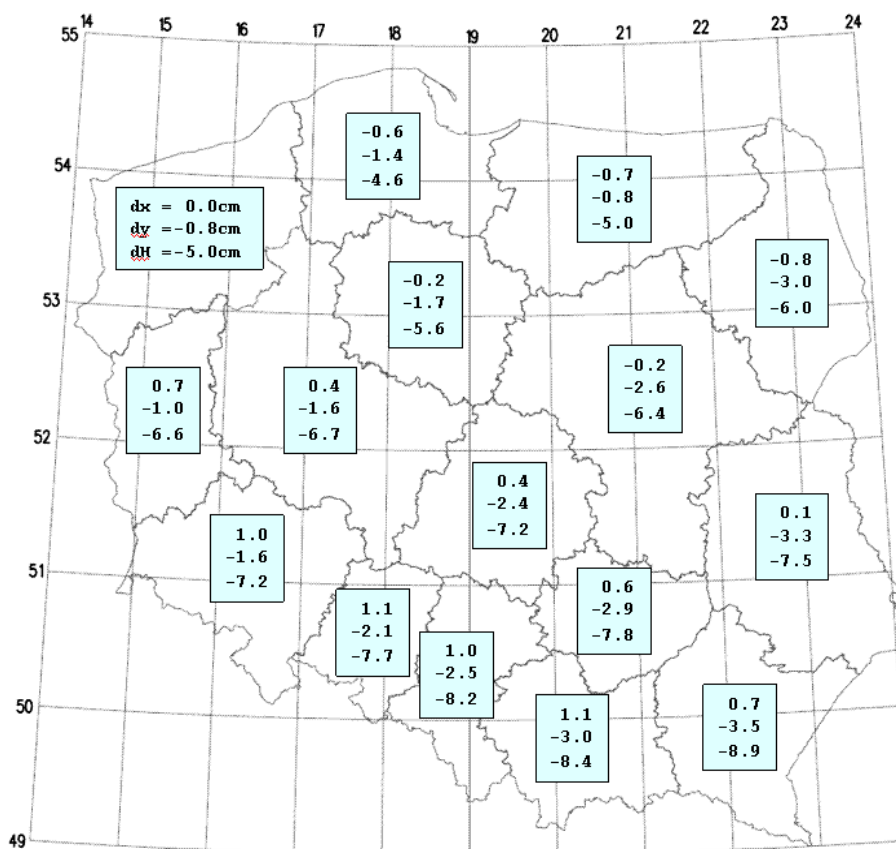
(p , q oznaczone jak powyżej w układzie PL-1992 w zaokrągleniu do metra)

Średnia zmiana pionowego „usytuowania” elipsoidy GRS80 w obu układach wynosi -0.066 m (elipsoida w układzie nowym PL-ETRF2000 jest usytu-

owana wyżej o 6.6cm) ale ze względu na zmianę położenia względem środka układu, różnice wysokości elipsoidalnych mogą się zmieniać w przedziale:

$$\Delta H: < -0.128\text{m} , -0.005\text{m} >$$

(krańce przedziału określono tutaj ze zbioru wysokości punktów dostosowania).



Rys.2. Uśredniony rozkład obszarowy (z podziałem na województwa) poprawek dx, dy, dh (w cm) jakie należy dodać do współrzędnych płaskich i wysokości w układzie PL-ETRF89 aby otrzymać skorygowane współrzędne i wysokości w układzie odniesienia PL-ETRF2000.

Fig.2. Territorial averaged distribution (by provinces) of amendments dx, dy, dh (in cm) which should be added to the horizontal coordinates and to the heights in the PL-ETRF89 system in order to obtain the corrected coordinates and heights in the PL-ETRF2000 system.

Na rys. 2 przedstawiono w przybliżeniu rozkład obszarowy (uśredniony w obszarach województw) poprawek (cm) do współrzędnych płaskich i wysokości pochodzących z układu PL-ETRF89 w celu otrzymania skorygowanych wielkości odpowiadających w układzie PL-ETRF2000.

W konkluzji rozważań należy stwierdzić, że różnice pomiędzy układami PL-ETRF89 a PL-ETRF2000 są na tyle istotne, że powinny być uwzględnione przy wszelkiego rodzaju integracjach lub porównaniach obiektów geodezyjno-kartograficznych wytworzonych w różnych układach odniesienia. Dotyczy to przede wszystkim powiązań istniejących osnów geodezyjnych z punktami (zbiorami punktów) wyznaczonymi przy wykorzystaniu serwisów precyzyjnego pozycjonowania ASG-EUPOS.

Podane wzory transformacji trójwymiarowej zostały zaimplementowane w nowej wersji programu TRANSPOL w. 2.06 [6], dostępnego na stronach: www.gugik.gov.pl, www.asgeupos.pl [8,9]. W programie dostępny jest również nowy model polskiej quasi-geoidy PL-geoid-2011, którego anomalie wysokości są wyrażone już jako różnice wysokości elipsoidalnych w układzie PL-ETRF2000 i wysokości normalnych w układzie PL-KRON86-NH.

Literatura

- [1] Bosy J.: Wyniki weryfikacji wyników integracji podstawowej osnowy geodezyjnej na obszarze kraju ze stacjami referencyjnymi systemu ASG-EUPOS. Raport dla GUGiK-Warszawa, Wrocław, 30 listopada 2011.
- [2] Jaworski L. i in.: Zintegrowanie podstawowej osnowy geodezyjnej na obszarze Polski ze stacjami referencyjnymi systemu ASG-EUPOS ETAP IV. Opracowanie i wyrównanie obserwacji GNSS. Raport CBK dla GUGiK [Pomiary wykonane przez Konsorcjum: OPGK sp. z o.o. w Lublinie (lider), CBK-Warszawa - wykonanie prac w etapie IV, PPGK S.A. Warszawa, PPG Sp. z o.o. Warszawa, OPGK w Łodzi Sp. z o.o., PMG Sp z o.o., Katowice], Warszawa, lipiec 2011.
- [3] Kadaj R.: Algorytm opracowania modelu PL-geoid-2011. Seminarium KG PAN i Wydział Geodezji i Kartografii PW p.t. Realizacja osnów geodezyjnych a problemy geodynamiki, Grybów, 25-27 września 2014.
- [4] Kadaj R.: Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych. Wytoczne Techniczne G-1.10 (załącznik – program TRANSPOL). Wyd. GUGiK, Warszawa 2001.
- [5] Kadaj R.: Skutki metryczne wprowadzenia układu PL-ETRF2000, w tym dotyczące kalibracji modeli quasi-geoidy. Konferencja Komisji Geodezji Satelitarnej Komitetu Badań Kosmicznych i Satelitarnych PAN AGH w Krakowie, 24-27 września 2013.
- [6] Kadaj R., Świętoń T.: TRANSPOL 2.06 – Program transformacji i przeliczeń współrzędnych pomiędzy różnymi układami w państwowym systemie odniesień przestrzennych. Opis metod, algorytmów i oprogramowania. Wykonano dla GUGiK na podstawie umowy nr BO-4-2503-183/GI-2500-610-83/2012 z dnia 17 grudnia 2012. Program wraz z opisem dostępny na stronach: www.gugik.gov.pl, www.asgeupos.pl.
- [7] Liwosz T., Rogowski J., Kruczyk M., Rajner M., Kurka W.: Wyrównanie kontrolne obserwacji satelitarnych GNSS wykonanych na punktach ASG-EUPOS, EUREF-POL, EUVN, POLREF i osnowy I klasy wraz z oceną wyników. Katedra

Geodezji i Astronomii Geodezyjnej Wydział Geodezji i Kartografii Politechnika Warszawska, Raport dla GUGiK-Warszawa, Warszawa, 15 grudnia 2011.

- [8] Materiały informacyjne ASG-EUPOS na stronach www.asgeupos.pl, www.gugik.gov.pl
- [9] Materiały informacyjne firmy AlgoRes-Soft na stronie www.geonet.net.pl
- [10] Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych.
- [11] Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 24. sierpnia 2000 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych.

THE REFERENCE SYSTEMS PL-ETRF89, PL-ETRF2000 AND RELATIONS BETWEEN THEM

S u m m a r y

The new reference frame PL-ETRF2000, represented by the stations ASG-EUPOS system was introduced for use formally by the Government Ordinance in 2012., although the stations coordinates in this system became available only in July 2013. Due to the widespread use of services ASG-EUPOS important issue is the relationships between new reference frame and the existed reference system PL-ETRF89, which has in Poland more than 20-years history – applied almost all most important geodetic and cartographic "products". Depending on the application, these relationships can be "theoretical", expressed by the conformal (7-parameters) transformation or "empirical", based on an interpolation grid, which allows to take into account additional local deformations of the PL-ETRF89. For this last task, in addition to POLREF network points it became possible to use the results of the new adjustment of the old national network of first class in the PL-ETRF2000 reference frame. After introducing the new reference system PL-ETRF2000, a need to calibrate the quasi-geoid models (height anomalies) on the new ellipsoidal heights occurred. In practical use, the the point is that the satellite leveling performed using ASG-EUPOS system services and the model of quasi-geoid gave normal height in a PL-KRON86-NH without a systematic shift. The paper presents the assumptions and results of parameters estimation of conformal transformation between two systems, pointing to the need to apply these formulas in the case of integration of objects (e.g. geodetic networks) coming with different reference systems.

Keywords: reference frame, ASG-EUPOS system, transformation parameters

Przesłano do redakcji: 30.05.2015

Przyjęto do druku: 10.01.2016

DOI: 10.7862/rb.2015.187