

Jacek JAWORSKI<sup>1</sup>  
Olga SZLACHETKA<sup>2</sup>  
Luz Antonio AGUILERA-CORTÉS<sup>3</sup>

## ZASTOSOWANIE METODY RAYLEIGH'A DO OBLICZENIA PIERWSZEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPÓW WSPORNIKOWYCH O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

Metodą Rayleigh'a wyprowadzono wzory na częstość (lub okres) dla pierwszej postaci drgań własnych (giętnych) słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka o różnych zbieżnościach ścianek bocznych, z materiału jednorodnego i sprężystego. Przyjęto, że kształt wychylenia osi słupa podczas drgań odpowiada ugięciu statycznemu pod działaniem obciążenia ciągłego. Uwzględniono trzy różne rozkłady obciążeń ciągłych. Otrzymane okresy drgań porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (ANSYS). Stwierdzono dużą zgodność wyników. Przeanalizowano możliwość rozszerzenia uzyskanych wyników dla słupów wspornikowych w kształcie ostrosłupów ściętych prawidłowych i ściętego stożka współosiowo wdrążonego (rury stożkowej).

**Słowa kluczowe:** słup stalowy, linia ugięcia, pierwsza częstość drgań własnych

### 1. Wprowadzenie

Częstości kolejnych postaci drgań własnych belki można otrzymać rozwiązując dla określonych warunków brzegowych równanie drgań belki Bernoulliego–Eulera, sposób postępowania umożliwiający uzyskanie rozwiązania numerycznego dla belki w kształcie ściętego stożka przedstawiono w pracy [1]. Inne

<sup>1</sup> Autor do korespondencji: Jacek Jaworski, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, tel. (22) 59- 35109, e-mail: [jacek\\_jaworski@sggw.pl](mailto:jacek_jaworski@sggw.pl).

<sup>2</sup> Olga Szlachetka, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, telefon (22) 59-35110, e-mail: [olga\\_szlachetka@sggw.pl](mailto:olga_szlachetka@sggw.pl).

<sup>3</sup> Luz Antonio Aguilera-Cortés, Depto. Ingeniería Mecánica, DICIS-Universidad de Guanajuato Carretera Salamanca-Valle de Santiago km 3.5+1.8, CP 36885 Salamanca, Guanajuato, México, tel. (52) 464-647-9940 (ext. 2381), e-mail: [aguilera@ugto.mx](mailto:aguilera@ugto.mx)

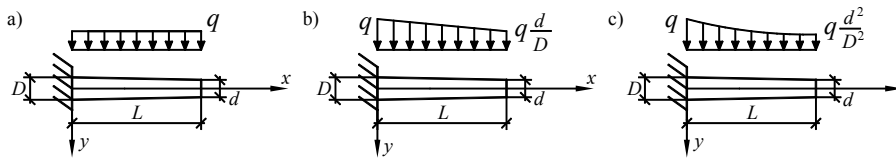
metody i dalsze wyniki rozwiązań dla belek o zmiennych przekrojach poprzecznych omówiono w pracy [2].

Autorzy tej pracy stawiają sobie za cel wyprowadzenie metodą Rayleigh'a wzorów na pierwszą częstość drgań własnych (giętnych) słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka. Założono, że amplituda drgań jest mała, materiał jednorodny, izotropowy i idealnie sprężysty, a masa jest rozłożona w sposób ciągły, co prowadzi czasem do dużych trudności przy całkowaniu. Jeśli znajdzie się jednak rozwiązanie zamknięte, uzyskujemy wzór tak prosty, że do obliczenia częstości (lub okresu) drgań wystarczy podręczny kalkulator.

W metodzie Rayleigh'a zakłada się kształt wychylenia osi słupa podczas drgań. Przyjęcie tego kształtu w postaci paraboli, funkcji trygonometrycznej lub linii ugięcia statycznego osi słupa pod działaniem siły poprzecznej, przyłożonej do jego wierzchołka nie prowadzi do dobrych wyników, szczególnie przy prętach o kształcie zbliżonym do stożka. Porównanie wyników uzyskanych przy takich założeniach z obliczeniami MES znaleźć można w pracy [4].

W niniejszej pracy uwzględniono trzy rodzaje obciążenia ciągłego: stałe  $q_1$ , proporcjonalne do średnicy pręta  $q_2$ , proporcjonalne do pola przekroju i tym samym do masy pręta (czyli do kwadratu jego średnicy)  $q_3$ , (rysunek 1)

$$q_1 = \text{const} = q \quad (1); \quad q_2(x) = q \frac{D(x)}{D} \quad (2); \quad q_3(x) = q \frac{D^2(x)}{D^2} \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat pręta wspornikowego do obliczenia ugięcia, a) obciążenie ciągłe stałe, b), c) obciążenia ciągłe zmienne zgodnie ze wzorami (2) i (3)

Fig. 1. Cantilever beams: a) uniformly loaded, b), c) linear variable continuous load according to eq. (2) and (3), respectively

Średnica słupa i moment bezwładności w dowolnym przekroju poprzecznym pręta określonym współrzędną  $x$  wynoszą odpowiednio (rysunek 1)

$$D(x) = D - \frac{D-d}{L}x \quad (4); \quad J(x) = \frac{\pi D^4(x)}{64} \quad (5); \quad n = \frac{D}{d} \quad (6)$$

gdzie:  $D, d$  – średnice skrajnych przekrojów pręta,

$L$  – długość pręta,

$n$  – iloraz średnic określający stopień zbieżności ścianek ściętego stożka,

$J$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

## 2. Wyprowadzenie wzorów na okres drgań

### 2.1. Metoda obliczeń

Sposób postępowania pokazano dokładnie na przykładzie pręta obciążonego stałym obciążeniem ciągłym  $q$ . Ugięcie obliczono całkując równanie różniczkowe osi odkształconej pręta.

$$EJ(x) \frac{d^2 u}{dx^2} = -M(x) = \frac{qL^2}{2} - qLx + \frac{qx^2}{2} \quad (7)$$

gdzie:  $u$  – ugięcie,

$E$  – moduł sprężystości podłużnej,

$M$  – moment zginający w przekroju pręta określonym współrzędną  $x$ ,

$q$  – obciążenie ciągłe o stałej wartości.

Całkując dwukrotnie i wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych otrzymano wyrażenie na ugięcie pręta

$$u(x) = \frac{32q}{\pi E a^4} A(x) \quad (8)$$

w którym

$$a = \frac{d - D}{L} \quad (9)$$

$$A(x) = \frac{3D^2 - 3Dd + d^2}{3D^3} ax + \frac{d(6D - d)}{6D^2} + \ln \frac{D}{ax + D} - \frac{d}{ax + D} + \frac{d^2}{6(ax + D)^2} \quad (10)$$

Przyjmując, że oś słupa (rysunek 2) wychylona podczas drgań ma kształt określony równaniem (8) obliczono energię potencjalną w pozycji wychylonej i energię kinetyczną w pozycji nieodkształconej. Energia potencjalna wynosi

$$E_p = \int_0^L \frac{1}{2} qu(x) dx = \frac{1}{2} q \frac{32q}{\pi E a^4} \int_0^L A(x) dx \quad (11)$$

Oznaczając jako  $m(x)$  masę plastra materiału o grubości  $dx$

$$m(x) = \frac{\rho \pi D^2(x)}{4} dx \quad (12)$$

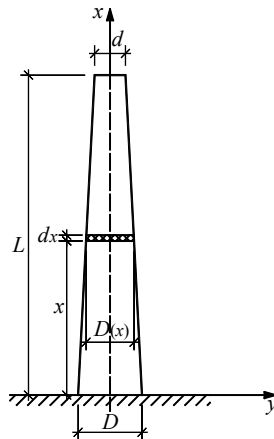
wyznaczono energię kinetyczną słupa jako

$$E_k = \int_0^L \frac{1}{2} \omega^2 u^2(x) m(x) dx = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\rho \pi}{4} \left( \frac{32q}{\pi E a^4} \right)^2 \int_0^L (ax + D)^2 A^2(x) dx \quad (13)$$

Porównując wartości energii wyznaczono częstość drgań. Okres drgań wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi L^2}{(n-1)^2 d^2} \sqrt{\frac{2\rho}{E} \frac{\int_0^L (ax + D)^2 A^2(x) dx}{\int_0^L A(x) dx}} \quad (14)$$

gdzie:  $T$  – okres drgań,  
 $\omega$  – częstość kołowa drgań,  
 $\rho$  – gęstość masy,  
 $E$  – moduł sprężystości podłużnej,  
 $n$  – iloraz dolnej i górnej średnicy słupa, jak we wzorze (6).



Rys. 2. Schemat do obliczenia okresu drgań własnych słupa

Fig. 2. Scheme for calculations of the natural period of a column

Po scałkowaniu i uproszczeniu okres drgań może być wyrażony w funkcji stałych materiałowych  $E$  i  $\rho$ , oraz parametrów  $D$ ,  $L$  i  $n$ , określających kształt geometryczny słupa

$$T = \frac{4\pi L^2}{3D} \frac{n}{(n-1)^2} \sqrt{\frac{\rho}{E} \frac{A(n) + (60 \ln n)B(n)}{10C(n)}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\text{gdzie: } A(n) &= 11n^6 - 87n^5 + 375n^4 - 1184n^3 + 3219n^2 - 4281n + \\
&+ 2817 - 1080n^{-1} + 234n^{-2} - 24n^{-3}, \\
B(n) &= 14n^3 - 33n^2 + 15n - 3 - 6n^3 \ln n, \\
C(n) &= 3n^4 + 10n^3 - 18n^2 + 6n - 1 - 12n^3 \ln n.
\end{aligned} \tag{16}$$

## 2.2. Wzory dla przypadku obciążenia ciągłego zmiennego

Postępując analogicznie jak w poprzednim punkcie, wyprowadzono wzory dla przypadku, gdy oś słupa wychylona podczas drgań ma kształt linii ugięcia statycznego przy obciążeniach ciągłych o wartości zmiennej, opisanych wzorami (2) i (3). We wzorach (17) i (23)  $q$  oznacza wartość obciążenia ciągłego występującą przy utwierdzeniu pręta.

Dla obciążenia ciągłego jak we wzorze (2) otrzymamy równanie osi ugiętej

$$EJ(x) \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{q}{6n} \left[ \frac{1-n}{L} x^3 + 3nx^2 - 3L(n+1)x + L^2(n+2) \right] \tag{17}$$

i wzór na ugięcie w postaci

$$u(x) = \frac{64q}{\pi E} A_1(x) \tag{18}$$

w którym oznaczono

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \frac{5}{36} \frac{D}{a^5 L} \frac{n-1}{n} + \frac{5}{12a^4} + \frac{L}{6a^3 D} \frac{n+1}{n} - \frac{L^2}{36a^2 D^2} \frac{n+2}{n} + \ln D \left[ \frac{1}{2a^4} + \frac{2D}{3a^5 L} \frac{n-1}{n} \right] + \\
&+ \left[ \frac{1}{4a^4 L} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{6a^4 L} \frac{n-1}{n} \ln D + \frac{1}{6a^3 D} - \frac{L}{12a^2 D^2} \frac{n+1}{n} + \frac{L^2}{18aD^3} \frac{n+2}{n} \right] x + \\
&+ \frac{1}{36a^3 DL} \frac{n-1}{n} x^2 + \left[ \frac{L^2}{36a^2} \frac{n+2}{n} + \frac{LD}{12a^3} \frac{n+1}{n} + \frac{D^2}{12a^4} + \frac{D^3}{18a^5 L} \frac{n-1}{n} \right] \frac{1}{(ax+D)^2} + \\
&- \frac{1}{36aDL} \frac{n-1}{n} \frac{x^4}{(ax+D)^2} - \left[ \frac{L}{4a^3} \frac{n+1}{n} + \frac{D}{2a^4} + \frac{13D^2}{36a^5 L} \frac{n-1}{n} \right] \frac{1}{ax+D} + \\
&- \left[ \frac{1}{2a^4} + \frac{b}{2a^5 L} \frac{n-1}{n} \right] \ln(ax+D) + \frac{1}{6a^5 L} \frac{n-1}{n} (ax+D) - \frac{1}{6a^5 L} \frac{n-1}{n} (ax+D) \ln(ax+D)
\end{aligned} \tag{19}$$

Porównując energię potencjalną i energię kinetyczną w dwóch charakterystycznych położeniach pręta otrzymujemy wzór na okres drgań słupa

$$T = 8\pi \sqrt{\frac{\rho}{E}} \sqrt{\frac{\int_0^L (ax + D)^2 A_1^2(x) dx}{\int_0^L \left(1 - \frac{n-1}{nL}x\right) A_1(x) dx}} \quad (20)$$

Po scałkowaniu i uproszczeniu, do którego użyto programu komputerowego algebry symbolicznej Maple, okres drgań może być wyrażony jako

$$T = \frac{4}{5} \frac{\pi L^2}{(n-1)^2 D} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \sqrt{\frac{A(n) + (100 \ln n) B(n)}{30n C(n)}} \quad (21)$$

gdzie:  $A(n) = 39n^{11} - 645n^9 - 1755n^8 + 17175n^7 - 32264n^6 + 47925n^5 +$   
 $- 58605n^4 + 45130n^3 - 22800n^2 + 6600n - 800,$   
 $B(n) = 45n^7 - 193,2n^6 + 135n^5 - 99n^4 + 24n^3 - 18n^6 \ln n,$  (22)  
 $C(n) = n^6 - 18n^4 + 30n^3 + 12n^3 \ln n - 27n^2 + 18n - 4$

Dla obciążenia ciągłego proporcjonalnego do pola powierzchni przekroju (a więc do kwadratu średnicy) słupa (wzór 3) otrzymamy równanie różniczkowe osi ugiętej w postaci

$$EJ(x) \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{qL^2}{12} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} - \frac{qL}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n^2} x +$$

$$+ q \frac{6n^2 - 4n(n-1)x + (n-1)^2 \frac{x^2}{L^2}}{12n^2} \quad (23)$$

Uzyskano zamkniętą postać wzoru na ugięcie (funkcja  $A_3(x)$ ) jest jednak zbyt rozbudowana, żeby ją tu zamieścić) i porównując energie otrzymano wyrażenie na okres drgań słupa.

$$u(x) = \frac{64q}{\pi E} A_3(x) \quad (24)$$

$$T = 8\pi D \sqrt{\frac{\rho}{E}} \sqrt{\frac{\int_0^L (ax + D)^2 A_3^2(x) dx}{\int_0^L (ax + D)^2 A_3(x) dx}} \quad (25)$$

Ponieważ wyniki uzyskane ze wzoru (25) nie są bliższe rezultatom z MES od wyników ze wzoru (20), nie szukano innej postaci wzoru (25), a wartości liczbowe do przykładu obliczono przy użyciu programu Mathematica.

Dla prętów w kształcie walca ( $n = 1$ ), każde z trzech przedstawionych obciążeń ciągłych redukuje się do obciążenia stałego i otrzymujemy takie same rozwiązanie na okres drgań

$$T = \frac{4}{9} \frac{\pi L^2}{D} \sqrt{\frac{26\rho}{E}} \quad (26)$$

Dla prętów w kształcie stożka ( $n = \infty$ ), okres drgań jest równy granicy przy  $n \rightarrow \infty$  funkcji opisanych wzorami (15) i (21), co prowadzi odpowiednio do wzorów

$$T = \frac{4}{3} \frac{\pi L^2}{D} \sqrt{\frac{11\rho}{30E}} \quad (27)$$

$$T = \frac{4}{5} \frac{\pi L^2}{D} \sqrt{\frac{13\rho}{10E}} \quad (28)$$

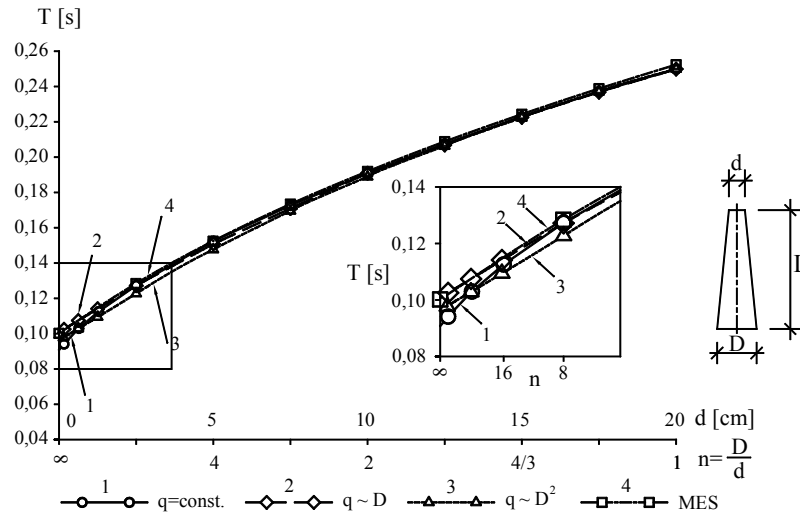
### 3. Porównanie wyników

W tabeli 1 oraz na rysunku 3 porównano okresy drgań własnych słupów wspornikowych w funkcji zbieżności ścianek bocznych stożka, określonej parametrem  $n$ . Uwzględniono trzy rozpatrzone wyżej przypadki kształtu osi słupa wychylonej podczas drgań. Obliczenia wykonano dla słupów stalowych o wysokości  $H = 6$  m, średnicy podstawy  $D = 20$  cm i średnicach głowicy od  $d = 0$  (stożek) do  $d = 20$  cm (walec).

Tab. 1. Błędy względne między okresami drgań wg wzorów 1-(15), 2-(21) i 3-(25) a 4-MES

Tab. 1. Relative errors between the natural periods by equations 1-(15), 2-(21), 3-(25) and 4-MES

d [cm]	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	
n [-]	$\infty$	8	4	2,67	2	1,6	1,33	1,14	1	
4	T [s]	0,1002	0,1284	0,1524	0,1734	0,1919	0,2088	0,2243	0,2388	0,2524
	$\delta$ [%]	3,59	4,42	3,11	2,22	1,56	1,20	0,93	0,77	0,63
3	T [s]	0,0966	0,1227	0,1477	0,1696	0,1889	0,2063	0,2222	0,2370	0,2508
	$\delta$ [%]	3,59	4,42	3,11	2,22	1,56	1,20	0,93	0,77	0,63
2	T [s]	0,1009	0,1272	0,1509	0,1716	0,1902	0,2070	0,2226	0,2371	0,2508
	$\delta$ [%]	0,73	0,92	0,99	1,02	0,90	0,84	0,75	0,70	0,63
1	T [s]	0,0893	0,1273	0,1519	0,1726	0,1909	0,2076	0,2229	0,2373	0,2508
	$\delta$ [%]	10,84	0,83	0,30	0,44	0,50	0,59	0,61	0,64	0,63



Rys. 3. Porównanie okresów drgań obliczonych: 1– według wzoru (15), 2– według (21), 3– według (25), 4 – MES (ANSYS)

Fig. 3. Comparison of natural periods calculated: 1– by equation (15), 2– by eq. (21), 3– by eq.(25), 4– using FEM (ANSYS)

Trzy krzywe mają bardzo zbliżony do siebie kształt i odpowiadają wynikom obliczeń MES, wykonanym w programie ANSYS (użyto elementów Solid 45 a dla stożka Tetraedr 45). Dla słupów w kształcie ściętego stożka o zbieżności ścianek bocznych od  $n=1$  do  $n=8$  najbliższe wynikom MES jest rozwiązanie według wzoru (15). Dla słupa w kształcie stożka i przy zbieżności  $n$  powyżej 16 dokładniejszy jest wzór (21).

#### 4. Możliwość rozszerzenia wyników na inne przekroje prętów

Ponieważ schemat wyprowadzenia jest analogiczny, wzory (15) i (21) mogą być – przy niewielkiej modyfikacji – wykorzystane do wyznaczenia okresów drgań słupów w kształcie ostrosłupa ściętego prawidłowego. Zamiast średnic  $D$  i  $d$  trzeba wstawić długości boków odpowiedniej figury podstawy i wierzchołka, a okres dla ściętego stożka przemnożyć przez pierwiastek z ilorazu odpowiednich wyrażeń na pola i momenty bezwładności. Na przykład dla ostrosłupa czworokątnego i sześciokątnego otrzymamy odpowiednio wzory

$$T_{4-bok} = T_{stoż.sc.} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (29)$$

$$T_{6-bok} = T_{stoż.sc.} \times \sqrt{0,3} \quad (30)$$

Wzory (15) i (21) mogą być też zastosowane dla szczególnego przypadku rury stożkowej, gdy tworzące stożka zewnętrznej i wewnętrznej (otworu) przecinają się w jednym punkcie na osi stożka [3]. Oznaczając przez  $\alpha$  iloraz średnicy wewnętrznej i zewnętrznej otrzymamy wzór na okres drgań

$$T_{L=l} = T_{stoż.sc.} \times \sqrt{\frac{1}{1+\alpha^2}} \quad (31)$$

Natomiast wyprowadzając wzór analogiczny do (15) dla słupa w kształcie współosiowo wydrążonego ściętego stożka otrzymuje się wyrażenia całkowite wymagające obliczeń numerycznych [3].

## 5. Wnioski

Wzory na pierwszą częstość drgań własnych słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka wyprowadzone metodą Rayleigh'a przy założeniu, że oś słupa wychylonego podczas drgań ma kształt ugięcia statycznego pod obciążeniem ciągłym wykazują wysoką zgodność z rozwiązaniem MES. Są też zgodne z wynikami z pracy [1]. Krzywe na rysunku 3 praktycznie się nie różnią, dlatego do obliczeń wystarczy stosować wzór (21) lub trochę mniej dokładny dla słupów o kształtach bardzo zbliżonych do stożka wzór (15). Przyjęcie kształtu osi wychylonej podczas drgań w postaci funkcji ugięcia statycznego pod obciążeniem ciągłym proporcjonalnym do masy słupa (wzór 25) nie daje wyników bliższych rozwiązaniu MES od pozostałych wzorów.

Uzyskane wzory (15) i (21) są do celów praktycznych wystarczająco dokładne, a jednocześnie tak proste, że do obliczeń wystarczy kalkulator.

Istnieje możliwość wykorzystania otrzymanych wzorów dla ostrosłupów ściętych prawidłowych i szczególnego przypadku rury stożkowej. W ogólnym przypadku rury stożkowej zastosowanie podanej metody napotyka jednak na znaczne trudności obliczeniowe.

## Literatura

- [1] Conway H.D., Dubil J.F.: Vibration Frequencies of Truncated-Cone and Wedge Beams, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol. 32 (4), 1965, s. 932-934.
- [2] Ece M.C., Aydogdu M. Taskin V.: Vibration of variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications (Elsevier)*, 34, 2007, s. 78-84.
- [3] Jaworski J.: O pewnej metodzie obliczania pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych w kształcie wydrążonego ściętego stożka, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 9 (3), 2010, s. 3-15.
- [4] Jaworski J., Szlachetka O.: Drgania własne słupów w kształcie ściętego stożka, *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, tom XXXI, zeszyt 61 (nr 2/2014), 2014, s. 33-42.

## APPLICATION OF RAYLEIGH'S METHOD TO CALCULATION OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY OF CANTILEVER COLUMNS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

### Summary

Formulas for the frequency (or period) in the first mode of natural transverse vibration of homogenous and elastic columns with clamped bottom and free head were derived by Rayleigh's method. The columns are shaped as truncated-cones with different inclination of lateral faces, from cylinder to cone. The deflection line of a column axis during the vibration in the form of the bending line of uniformly loaded columns was assumed. Three forms of linear variable continuous loads were included. Resulting periods were compared with those obtained using FEM (program ANSYS) and a good exactitude of results was observed. Possibilities of amplification of obtained equations for cantilever columns in form of truncated regular pyramids and hollow cone (tube shaped like a cone) were discussed.

**Keywords:** steel column, bending line, first natural frequency

*Przesłano do redakcji: 30.05.2015*

*Przyjęto do druku: 1.12.2015*

DOI: 10.7862/rb.2015.149