

Piotr RUTA¹
Małgorzata MEISSNER²

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA WŁASNEGO DLA NIEPRYZMATYCZNEGO ŁUKU KOŁOWEGO Z WYKORZYSTANIEM SZEREGÓW CZEBYSZEW A

Przedmiotem analizy jest zagadnienie własne łuku kołowego o zmiennym przekroju, opisane według teorii Bernoulliego-Eulera. Problem jest rozwiązywany z wykorzystaniem metody aproksymacyjnej, w której do aproksymacji wykorzystuje się szeregi wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Zastosowana w pracy metoda jest oparta na ogólnym twierdzeniu opisującym związki rekurencyjne dla równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Metoda ta prowadzi do wyznaczenia nieskończonego układu równań algebraicznych, którego współczynniki są określone zamkniętymi formułami analitycznymi. Formuły te w sposób jawny zależą od wyrazów szeregów, w które rozwinięto zmienne współczynniki wyjściowych równań różniczkowych. Otrzymana w ten sposób ogólna postać równań algebraicznych pozwala na rozwiązanie analizowanego zagadnienia dla dowolnych geometrycznych parametrów łuku, takich jak: krzywizna, zmienne pole i zmienny moment bezwładności przekroju czy gęstość łuku. Do analitycznych formuł opisujących współczynniki układu równań algebraicznych wystarczy bowiem podstawić współczynniki szeregów opisujących parametry materiałowe i geometryczne łuku. W celu weryfikacji poprawności oraz skuteczności otrzymanego algorytmu uzyskane prezentowaną w pracy metodą częstości i formy własne porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych. Obliczenia wykonano programem Cosmos/M, stosując do aproksymacji elementy belkowe 3D o liniowo zmiennym przekroju. W celu oceny różnicy między formami własnymi wyznaczono dla nich standardowy indeks MAC (*Modal Assurance Criterion*). Otrzymane rezultaty potwierdziły poprawność oraz skuteczność omawianej w pracy metody.

Słowa kluczowe: zagadnienie własne, łuk niepryzmatyczny, szeregi Czebyszewa

¹ Autor do korespondencji: Piotr Ruta, Politechnika Wrocławska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. +48 71 3204850, piotr.ruta@pwr.wroc.pl.

² Małgorzata Meissner, Politechnika Wrocławska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. +48 71 3204850, malgorzata.meissner@pwr.wroc.pl.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie drgań łuków jest istotne ze względu na zastosowanie tych układów w budownictwie i mechanice. Rozwiązanie tego problemu znacznie się komplikuje, gdy łuk jest niepryzmatyczny.

Zagadnienie drgań swobodnych łuków było analizowane m.in. w pracach Chidamparam i Leiss [1] oraz Lee i in. [2]. W publikacji [1] problem rozwiązano analitycznie z uwzględnieniem i pominięciem odkształcalności osiowej. W pracy Lee i in. [2] fundamentalne rozwiązanie układu równań różniczkowych wyznaczono metodą szeregów potęgowych. Problem drgań swobodnych łuków o zmiennym przekroju rozwiązali różnymi metodami m.in. Huang i in. [3], Kawakami i in. [4], Liu i Wu [5], Shin i in. [6], Tong i in. [7]. Huang i in. [3] do analizy łuku o dowolnej krzywiźnie i dowolnym przekroju zastosowali metodę Frobeniusa. Ta sama metoda została wykorzystana w pracy Huang i in. [8] do rozwiązania problemu drgań swobodnych i stateczności. Kawakami i in. [4] rozwiązali zagadnienie własne, stosując dyskretną funkcję Greena. Liu i Wu [5] do analizy zagadnienia własnego zastosowali uogólnioną zasadę kwadratur różnicowych, przyjmując założenie o braku odkształcalności osiowej. Metoda transformacji różnicowych oraz uogólniona metoda kwadratur różnicowych zostały zastosowane przez Shin i in. [6]. W pracy [7] wyprowadzono rozwiązanie analityczne łuku pryzmatycznego, a następnie zastosowano je do rozwiązania łuku o skokowo zmiennym przekroju. Nieh i in. [9] metodą szeregów potęgowych rozwiązali zagadnienia drgań swobodnych oraz stateczności pryzmatycznego łuku eliptycznego. W wielu pracach do analizy drgań zastosowano metodę elementów skończonych, np. w pracach Krishnana i in. [10], Yanga i in. [11], Öztürki i in. [12].

Analizowany w niniejszej pracy problem rozwiązano metodą zastosowaną we wcześniejszych pracach autora do rozwiązania zagadnień drgań własnych belek Eulera [13] i Timoshenki [14] oraz drgań wymuszonych obciążeniem ruchomym dźwigara zakrzywionego w planie [15]. Metoda ta jest oparta na twierdzeniu opisującym przybliżony sposób rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, przedstawiony w monografii Paszkowskiego [16], i wykorzystuje ona do aproksymacji rozwiązań szeregi Czebyszewa. W klasycznej metodzie wyznaczania rozwiązań w postaci szeregów porównuje się wprost współczynniki rozwinięć obu stron analizowanych równań. Przedstawiona w pracy metoda wykorzystuje natomiast związki rekurencyjne między tymi współczynnikami, co stanowi oryginalne podejście do analizowanego zagadnienia.

Opisane twierdzenie, ze względu na swój ogólny charakter, nie daje ostatecznych rozwiązań lub równań wprost prowadzących do takich rozwiązań, pozwala natomiast na opracowanie skutecznego algorytmu dla konkretnego co do struktury układu równań różniczkowych. Celem niniejszej pracy jest opracowanie takiego algorytmu dla równań opisujących zagadnienie drgań niepryzmatycznych łuków kołowych. Należy podkreślić, że uzyskane końcowe równania

pozwalają na rozwiązanie łuku kołowego o dowolnych parametrach geometrycznych i materiałowych.

W celu sprawdzenia poprawności wyprowadzonych wzorów, otrzymane w wyniku rozwiązania zagadnienia własnego częstości i wektory własne porównano z częstościami i wektorami własnymi wyznaczonymi metodą elementów skończonych.

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem analizy jest zagadnienie własne dla łuku kołowego o zmiennym przekroju, którego oś jest krzywą płaską leżącą w płaszczyźnie xy . Zakłada się również, że rozkład materiałowych i geometrycznych parametrów dźwigara jest symetryczny względem tej płaszczyzny. Równania opisujące drgania łuku w postaci bezwymiarowej mają w tym przypadku postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} -d \kappa EA \frac{\partial v}{\partial s} - d \kappa \frac{\partial}{\partial s} EA v + d EA \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + d \frac{\partial EA}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + g \rho \Omega^2 u = 0 \\ -EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} - 2 \frac{\partial EI_z}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} - \left(\frac{\partial^2 EI_z}{\partial s^2} + 2 \kappa^2 EI_z \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2 \kappa^2 \frac{\partial}{\partial s} EI_z \frac{\partial v}{\partial s} \\ - \left(d \kappa^2 EA + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} EI_z + \kappa^4 EI_z \right) v + d \kappa EA \frac{\partial u}{\partial s} + g \rho \Omega^2 v = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Siły przekrojowe są określone następującymi wzorami:

- siły osiowe

$$n = \frac{N}{P_0} = \frac{1}{f} \left(d EA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \kappa v \right) - EI_z \kappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \kappa^2 v \right) \right) \quad (2)$$

- momenty gnące

$$m = \frac{M}{P_0 a} = \frac{1}{f} \left(EI_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \kappa^2 v \right) \right) \quad (3)$$

gdzie: $u(s, t) = U(S, t)/a$, $v(s, t) = V(S, t)/a$ – odpowiednio bezwymiarowe przemieszczenia styczne i prostopadłe do osi łuku leżące w płaszczyźnie dźwigara,

$s = S/a$ – parametr opisujący oś dźwigara $s \in \langle -1, 1 \rangle$,

$\kappa = a/R$ – stała krzywizna łuku,

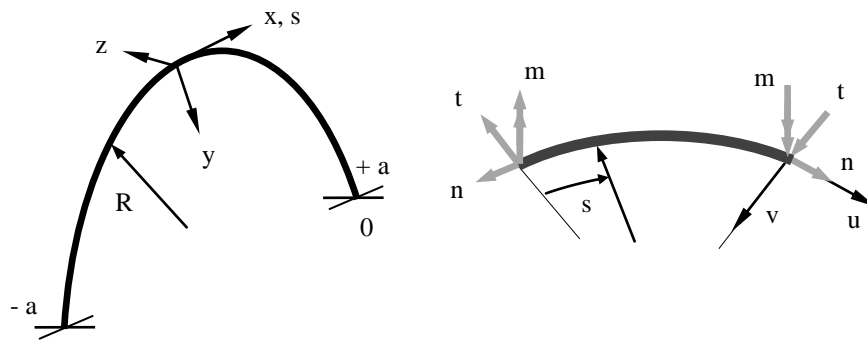
$\rho = \bar{\rho}/\rho_0$ – gęstość na jednostkę długości,

$EA = \bar{EA}/EA_0$ – sztywność osiowa,

$EI_z = \bar{EI}_z/EI_0$ – sztywność giętna oraz stałe $d = a^2 EA_0/EI_0$,

$f = a^2 P_0/EI_0$, $g = a^4 \rho_0/EI_0$; parametry ρ_0, EI_0, EA_0, P_0 są wielkościami porównawczymi.

Wielkość \bar{EA} to odpowiadająca EA charakterystyka w postaci wymiarowej itd. Występujący w równaniu (1) symbol Ω określa wymiarową kołową częstość własną, a \bar{I}_z jest uogólnionym momentem bezwładności przekroju. Schemat układu, przyjęte oznaczenie dotyczące osi lokalnego układu współrzędnych oraz siły wewnętrzne przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu, lokalny układ współrzędnych, przemieszczenia oraz siły wewnętrzne

Fig. 1. Scheme of the system, local coordinate system, displacements and internal forces

3. Rozwiązanie

Do rozwiązania układu (1) zastosowano przedstawione w monografii [16] twierdzenie (patrz [16]) opisujące metodę rozwiązywania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Nawiązując do oznaczeń cytowanego twierdzenia, układ równań (1) można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\sum_{n=0}^4 \hat{\mathbf{P}}_n(s) \mathbf{f}^{(4-n)}(s) + \Omega^2 \hat{\mathbf{R}}(s) \mathbf{f}(s) = 0 \quad (4)$$

W przypadku układu równań różniczkowych czwartego rzędu z cytowanego twierdzenia wynika, że współczynniki rozwinięcia poszukiwanego wektora \mathbf{f} spełniają następujący nieskończony układ równań:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} ' 8(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) k a_{k-1}[\mathbf{Q}_0] + a_{k+1}[\mathbf{Q}_0] \\
& + 4(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) a_{k-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k-1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k+1}[\mathbf{Q}_1] \\
& + 2(k^2-9)(k^2-4)(k+1) a_{k-2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+2}[\mathbf{Q}_2] - 2k a_{k-1}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+1}[\mathbf{Q}_2] \\
& + (k-1) a_{k-1+2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+1+2}[\mathbf{Q}_2] \\
& + (k^2-9)(k+1)(k+2) a_{k-1-3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+1-3}[\mathbf{Q}_3] - 3(k-1)(k+2) a_{k-1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+1}[\mathbf{Q}_3] \\
& + 3(k+1)(k-2) a_{k-1+1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+1+1}[\mathbf{Q}_3] - (k-1)(k-2) a_{k-1+3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+1+3}[\mathbf{Q}_3] \\
& + \frac{1}{2} (k+1)(k+2)(k+3) a_{k-1-4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+1-4}[\mathbf{Q}_4] - 4(k+3)(k^2-4) a_{k-1-2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+1-2}[\mathbf{Q}_4] \\
& + 6k(k^2-9) a_{k-1}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+1}[\mathbf{Q}_4] - 4(k-3)(k^2-4) a_{k-1+2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+1+2}[\mathbf{Q}_4] \\
& + (k-1)(k-2)(k-3) a_{k-1+4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+1+4}[\mathbf{Q}_4] a_1[\mathbf{f}] \\
& + \Omega^2 \frac{1}{2} (k+1)(k+2)(k+3) a_{k-1-4}[\mathbf{S}] + a_{k+1-4}[\mathbf{S}] - 4(k+3)(k^2-4) a_{k-1-2}[\mathbf{S}] + a_{k+1-2}[\mathbf{S}] \\
& + 6k(k^2-9) a_{k-1}[\mathbf{S}] + a_{k+1}[\mathbf{S}] - 4(k-3)(k^2-4) a_{k-1+2}[\mathbf{S}] + a_{k+1+2}[\mathbf{S}] \\
& + (k-1)(k-2)(k-3) a_{k-1+4}[\mathbf{S}] + a_{k+1+4}[\mathbf{S}] a_1[\mathbf{f}] = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

k = 0, 1, 2, 3, ...

(5)

gdzie funkcje macierzowe \mathbf{Q}_m i \mathbf{S} są określone wzorami:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0 &= \hat{\mathbf{P}}_0, \quad \mathbf{Q}_1 = -4\hat{\mathbf{P}}_0^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = 6\hat{\mathbf{P}}_0^{(2)} - 3\hat{\mathbf{P}}_1^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_2 \\
\mathbf{Q}_3 &= -4\hat{\mathbf{P}}_0^{(3)} + 3\hat{\mathbf{P}}_1^{(2)} - 2\hat{\mathbf{P}}_2^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_3, \quad \mathbf{Q}_4 = \hat{\mathbf{P}}_0^{(4)} - \hat{\mathbf{P}}_1^{(3)} + \hat{\mathbf{P}}_2^{(2)} - \hat{\mathbf{P}}_3^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_4, \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{R}}
\end{aligned}$$

(6)

a symbol sumy definiuje następującą operację $\sum_{l=0}^{\infty} ' a_l = 1/2 a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

W przypadku analizowanego zagadnienia $a_1[\mathbf{f}] = u_1 v_1^T$, gdzie u_1, v_1 są poszukiwanymi współczynnikami rozwinięć funkcji przemieszczeń $u(s)$ i $v(s)$ w szeregi Czebyszewa:

$$u(s) = \sum_{l=0}^{\infty} ' u_l T_l(s), \quad v(s) = \sum_{l=0}^{\infty} ' v_l T_l(s)$$

(7)

a $T_l(s)$ jest l -tym wielomianem Czebyszewa I rodzaju.

Występujące w równaniu (5) funkcje \mathbf{Q}_m i \mathbf{S} wyznaczone na podstawie zależności (6) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -EI_z \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 EI_z \end{bmatrix} \quad (1) \\ \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} d EA & 0 \\ 0 & -EI_z \end{bmatrix} \quad (2) \quad -2\kappa^2 EI_z, & \mathbf{Q}_3 &= \begin{bmatrix} -d EA & -d \kappa EA \\ d \kappa EA & 2\kappa^2 EI_z \end{bmatrix} \quad (1) \\ \mathbf{Q}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -d \kappa EA & -d \kappa^2 EA - \kappa^2 EI_z \end{bmatrix} \quad (2) \quad -\kappa^4 EI_z, & \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} g\rho & 0 \\ 0 & g\rho \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Po podstawieniu współczynników rozwinięć w szeregi Czebyszewa funkcji \mathbf{Q}_m i \mathbf{S} do równania (5) otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & k_{12}(k,l) \\ k_{21}(k,l) & k_{22}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \Omega^2 \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} b_{11}(k,l) & 0 \\ 0 & b_{22}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \\ = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Na tym etapie rozwiązania elementy $k_{ij}(k,l)$, $i, j = 1, 2$ równania (9) zawierają współczynniki rozwinięcia funkcji EI_z , EA , jak również współczynniki rozwinięć ich pochodnych. W celu eliminacji współczynników rozwinięć pochodnych wykonano przekształcenia elementów $k_{ij}(k,l)$ z wykorzystaniem wzoru [16] $f_1 = (f_{1-1}^{(1)} - f_{1+1}^{(1)})/2l$, $l \neq 0$, gdzie $f_1 = a_1[f]$, a $f_1^{(p)} = a_1[\partial^p f / \partial x^p]$. Po tych przekształceniach współczynniki $k_{ij}(k,l)$ równania (9) przyjmują ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} k_{11}(k,l) &= 2d(k^2 - 9)l \quad (k+1)(k+2) \quad a_{k-1-2} - a_{k+1-2} \\ &\quad - 2(k^2 - 4) \quad a_{k-1} - a_{k+1} \quad + (k-1)(k-2) \quad a_{k-1+2} - a_{k+1+2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} k_{12}(k,l) &= -2d\kappa(k^2 - 9) \\ &\quad (k+1)(k+2) \quad a_{k-1-3} + a_{k+1-3} \quad - 3(k-1)(k+2) \quad a_{k-1-1} + a_{k+1-1} \\ &\quad + 3(k+1)(k-2) \quad a_{k-1+1} + a_{k+1+1} \quad + (k-1)(k-2) \quad a_{k-1+3} + a_{k+1+3} \end{aligned} \quad (11)$$

$$k_{21}(k, l) = d \kappa \left[(k+1)(k+2)(k+3) a_{k-1-3} - a_{k+1-3} - 3(k+2)(k^2-9) a_{k-1-1} - a_{k+1-1} \right. \\ \left. + 3(k-2)(k^2-9) a_{k-1+1} - a_{k+1+1} + (k-1)(k-2)(k-3) a_{k-1+3} - a_{k+1+3} \right] \quad (12)$$

$$k_{22}(k, l) = -8l(k^2-9)(k^2-4) \left((k-1)(l+1) e_{k-1} - 2 \sum_{j=0}^l (k+2j-1) e_{k+2j-1} + (k+1)(l+1) e_{k+1} \right) \\ - 2\kappa^2 \left((k+1)(k+2)(k+3) k(k-5) + 6 + l(l-1) e_{k-1-2} + k(k-5) + 6 + l(l+1) e_{k+1-2} - \right. \\ \left. - 2(k-2)(k-3)(k(k+2)(k+3) + 6l + l^2(k+5)) e_{k-1} \right. \\ \left. - 2(k+2)(k+3)(k(k-2)(k-3) - 6l + l^2(k-5)) e_{k+1} \right. \\ \left. + (k-1)(k-2)(k-3) k(k+5) + 6 + l(l+1) e_{k-1-2} + k(k+5) + 6 + l(l-1) e_{k+1-2} - \right. \\ \left. - 120l \sum_{j=0}^l (k+2j-1) e_{k+2j-1} \right) \\ - \frac{1}{2} d \kappa^2 \left((k+1)(k+2)(k+3) a_{k-1-4} + a_{k+1-4} - 4(k+3)(k^2-4) a_{k-1-2} + a_{k+1-2} \right. \\ \left. + 6k(k^2-9) a_{k-1} + a_{k+1} - 4(k-3)(k^2-4) a_{k-1+2} + a_{k+1+2} \right. \\ \left. + (k-1)(k-2)(k-3) a_{k-1+4} + a_{k+1+4} \right) \\ - \frac{1}{2} \kappa^4 \left((k+1)(k+2)(k+3) e_{k-1-4} + e_{k+1-4} - 4(k+3)(k^2-4) e_{k-1-2} + e_{k+1-2} \right. \\ \left. + 6k(k^2-9) e_{k-1} + e_{k+1} - 4(k-3)(k^2-4) e_{k-1+2} + e_{k+1+2} \right. \\ \left. + (k-1)(k-2)(k-3) e_{k-1+4} + e_{k+1+4} \right) \quad (13)$$

Pozostałe współczynniki równania (9) wyrażają się wzorami:

$$b_{11}(k, l) = b_{22}(k, l) = \\ = \frac{1}{2} g \left((k+1)(k+2)(k+3) \rho_{k-1-4} + \rho_{k+1-4} - 4(k^2-4)(k+3)(k^2-4) \rho_{k-1-2} + \rho_{k+1-2} \right. \\ \left. + 6k(k^2-9) \rho_{k-1} + \rho_{k+1} - 4(k^2-4)(k-3)(k^2-4) \rho_{k-1+2} + \rho_{k+1+2} \right. \\ \left. + (k-1)(k-2)(k-3) \rho_{k-1+4} + \rho_{k+1+4} \right) \quad (14)$$

Występujące we wzorach (10)-(14) współczynniki są współczynnikami rozwińnięć w szeregi Czebyszewa następujących funkcji: $e_1 = a_1[El_z]$, $a_1 = a_1[EA]$, $\rho_1 = a_1[\rho]$.

Pierwsze osiem równań układu (9) (gdzie $k = 0, 1, 2, 3$) jest spełnionych tożsamościowo. Równania te zastępuje się sześcioma równaniami opisującymi warunki brzegowe. W formułowaniu tych warunków korzysta się z następujących wzorów pozwalających na obliczenie wartości wielomianów Czebyszewa w punktach $s = \mp 1$ [16]:

$$T_n(1) = 1, \quad T_n^{(m)}(1) = n^2, \quad T_n^{(m)}(-1) = (-1)^{n-m} T_n^{(m)}(1) \quad (15)$$

Układ równań (9) po uwzględnieniu warunków brzegowych, ograniczeniu go do skończonego układu $N = 2(m + 1)$ równań oraz po zmianie kolejności wyrazów ostatecznie przyjmuje postać:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + g\Omega^2\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{q} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^T$, a $\mathbf{u} = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_m]^T$, $\mathbf{v} = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_m]^T$.

4. Przykład numeryczny

Przedstawiony algorytm zastosowano do rozwiązania zagadnienia własnego dla niepryzmatycznego łuku kołowego. Kąt rozwarcia łuku wynosi $2\varphi_0 = 2/3\pi$. Końce łuku są utwierdzone. W tym przypadku równania opisujące warunki brzegowe na końcach dźwigara przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} u(-1) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l u_l = 0, & u(1) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l = 0 \\ v(-1) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l v_l = 0, & v(1) &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l = 0 \\ \frac{\partial v(-1)}{\partial s} + u(-1) &= -\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^2 v_l = 0, & \frac{\partial v(1)}{\partial s} + u(1) &= \sum_{l=0}^{\infty} l^2 v_l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Zagadnienie rozwiązano w postaci bezwymiarowej, przyjmując, że przekrój belki jest prostokątem o stałej szerokości b i zmiennej wysokości $h(S) = 2c(S/a)^2 + c$, gdzie $c/b = 2/3$, a $S \in \langle -a, a \rangle$. Pozostałe parametry to: $\rho_0 = \rho(0)$, $EI_0 = EI(0)$. Do aproksymacji każdego z przemieszczeń wykorzystano 40 wyrazów szeregu. W celu weryfikacji poprawności otrzymanego algorytmu uzyskane częstości i wektory własne porównano z częstościami i wektorami

otrzymanymi metodą elementów skończonych. Do obliczeń wykorzystano program komputerowy Cosmos/M. W modelu MES zastosowano podział na 40 elementów belkowych typu 3D o 12 stopniach swobody i liniowo zmiennym przekroju, a funkcje kształtu opisujące przemieszczenia wewnątrz elementu są wielomianami pierwszego i trzeciego stopnia. Wartości pierwszych sześciu częstości własnych uzyskane tymi metodami przedstawiono w tab. 1. Wykresy wyznaczonych za pomocą obu metod form własnych pokazano na rys. 2.

Tabela 1. Bezwymiarowe częstości własne $\omega = \Omega a^2 \sqrt{\rho_0/EI_0}$

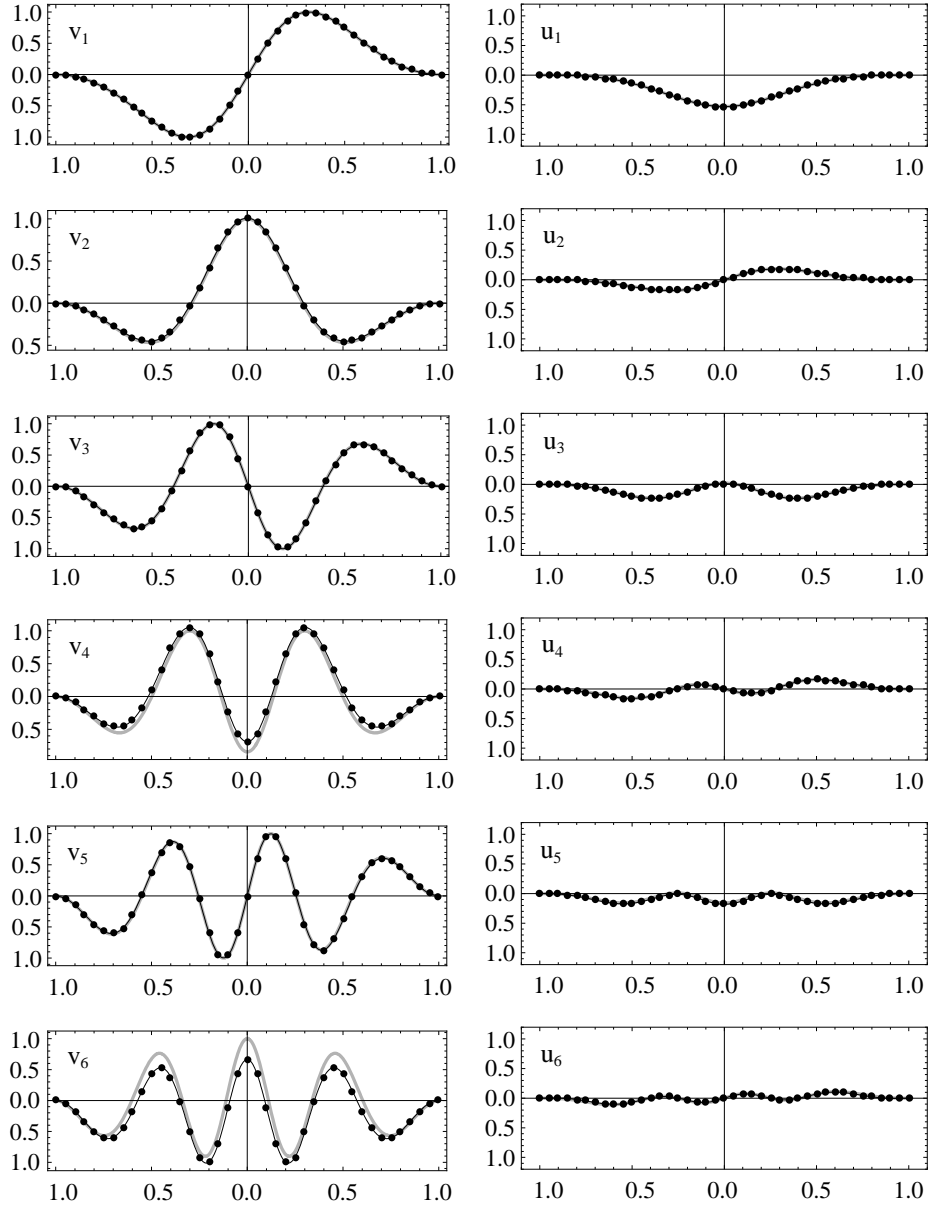
Table 1. Non-dimensional vibration frequencies $\omega = \Omega a^2 \sqrt{\rho_0/EI_0}$

ω	MES	Niniejsza praca	Błąd względny [%]
ω_1	26,30	26,33	0,11
ω_2	46,60	46,90	0,64
ω_3	78,67	78,89	0,28
ω_4	112,44	114,71	2,02
ω_5	160,51	161,45	0,59
ω_6	218,50	212,44	2,77

Aby ocenić błąd między formami własnymi wyznaczonymi dwoma sposobami, dla pierwszych sześciu form obliczono standardowy indeks MAC (*Modal Assurance Criterion*). Zastosowany indeks jest określony wzorem:

$$MAC[i, j] = \frac{\left(\sum_{k=1}^{lw} W_{ik} w_{jk} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{lw} W_{ik} W_{ik} \right) \left(\sum_{k=1}^{lw} w_{jk} w_{jk} \right)} \quad (18)$$

gdzie w_{jk} określa przemieszczenie k-tego węzła modelu MES w j-tej formie, W_{ik} to przemieszczenie punktu odpowiadającego k-temu węzłowi w i-tej formie, wyznaczonej opisaną w pracy metodą, $lw = 41$ jest liczbą węzłów w modelu MES. Wartości tego indeksu zawierają się w przedziale [0, 1]. Wartość 1 indeks przyjmuje przy pełnej zgodności form, a wartość 0 przy całkowitym jej braku (wektory są wtedy do siebie ortogonalne). Otrzymane wyniki przedstawiono w tab. 2.



Rys. 2. Wykresy form własnych; formy wyznaczone: metodą MES $\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet$, metodą przedstawioną w pracy ---

Fig. 2. Diagrams of eigenforms, forms designated by FEM $\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet$, by method presented in paper ---

Tabela 2. Standardowy indeks MAC[i, i]

Table 2. Standard MAC index MAC[i, i]

Nr form	Składowe przemieszczeń	
	v	u
1	0,999998	0,999993
2	0,999087	0,999846
3	0,999968	0,999429
4	0,974970	0,996564
5	0,999760	0,989556
6	0,894394	0,988412

5. Wnioski

Analiza uzyskanych w tab. 1. wyników pokazuje dużą zgodność otrzymanych częstości własnych z rezultatami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. W przypadku pierwszych sześciu częstości błąd względny przyjmuje wartości z przedziału 0,11-2,77%. Dobra zgodność jest też widoczna między wektorami własnymi. Większość z pokazanych na rys. 2., wyznaczonych dwoma metodami, wektorów własnych nie można rozróżnić. Różnice są widoczne tylko dla form 4 i 6. Jakość tej zgodności potwierdzają przedstawione w tab. 2. wartości standardowego indeksu MAC. Większość z nich jest praktycznie równa 1. Uzyskane wyniki potwierdzają zatem poprawność i skuteczność prezentowanej metody.

Należy też podkreślić, że końcowa postać układu równań (9) (ze współczynnikami określonymi wzorami (10)-(14)) pozwala na bezpośrednią analizę zagadnienia własnego łuku kołowego o dowolnych, innych niż przyjęte w niniejszej pracy, parametrach EI_z , EA, ρ . W tym celu do wzorów (10)-(14) wystarczy wstawić odpowiednie wartości współczynników rozwinięć w szeregi Czebyszewa nowych funkcji EI_z , EA, ρ .

Literatura

1. Chindamparam P., Leissa A.W.: Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches. *Journal of Sound and Vibration*, 183(5), 779-795, 1995.
2. Lee S.-Y., Sheu J.-J., Lin S.-M.: In-plane vibrational analysis of rotating curved beam with elastically restrained root. *Journal of Sound and Vibration*, 315, 1086-1102, 2008.
3. Huang C.S., Tseng Y.P., Leissa A.W., Nieh K.Y.: An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(11), 1159-1173, 1998.

4. Kawakami M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C.: In-plane and out of plane free vibrations of curved beams with variable sections. *Journal of Sound and Vibration*, 187(3), 381-401, 1995.
5. Liu G.R., Wu T.Y.: In-plane vibration analyses of circular arches by the generalized differential quadrature rule. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 2597-2611, 2001.
6. Shin Y.-J., Kwon K.-M., Yun J.-H.: Vibration analysis of a circular arch with variable cross-section using differential transformation and generalized differential quadrature. *Journal of Sound and Vibration*, 309, 9-19, 2008.
7. Tong X., Mrad N., Tabarrok B.: In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 212(1), 121-140, 1998.
8. Huang C.S., Nieh K.Y., Yang M.C.: In-plane free vibration and stability of loaded and shear-deformable circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 5865-5886, 2003.
9. Nieh K.Y., Huang C.S., Tseng Y.P.: An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches. *Computers and Structures*, 81, 1311-1327, 2003.
10. Krishnan A., Dharmaraj S., Suresh Y.J.: Free vibration studies of arches. *Journal of Sound and Vibration*, 186(5), 856-863, 1995.
11. Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E.: Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 318, 850-867, 2008.
12. Öztürk H., Yeşilyurt I., Sabuncu M.: In-plane stability analysis of non-uniform cross-sectioned curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 296, 277-291, 2006.
13. Ruta P.: Application of Chebyshev series to solution of non-prismatic beam vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 227(2), 449-467, 1999.
14. Ruta P.: The application of Chebyshev polynomials to the solution of the nonprismatic Timoshenko beam vibration problem. *Journal of Sound and Vibration*, 296, 243-263, 2006.
15. Meissner M., Ruta P.: Out-of-plane vibrations of curved nonprismatic beam under a moving load. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18(6), 773-782, 2012.
16. Paszkowski S.: *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*. PWN, Warszawa 1975.

EIGENPROBLEM OF NONPRISMATIC CIRCULAR ARCH SOLUTION USING CHEBYSHEV SERIES

Summary

The subject of analysis is eigenproblem of circular arch with variable cross-sections, described by the Bernoulli-Euler theory. The problem is solved using approximation method, in which Chebyshev polynomials of first kind series are used. Method used in paper is based on general theorem describing recursive relationships for differential equations with variable coefficients. This method leads to the designation of an infinite system of algebraic equations, coefficients of which are defined by closed analytical formulas. These formulas depend explicitly on

terms of the series, which are expansions of the variable coefficients of output differential equations. Thus obtained the general form of algebraic equations allows one to solve analysed problem for any geometrical arch parameters such as: curvature, variable cross-section area and moment of inertia, or arch density. It is enough to substitute coefficients of the series describing material and geometrical parameters to analytical formulas describing coefficients of the system of algebraic equations. In order to verify the effectiveness and correctness of obtained algorithm natural frequencies and eigenforms received from presented method were compared to the results obtained with the finite element method. Calculations were made in Cosmos/M program using 3D beam elements with linearly variable cross-section for approximation. In order to evaluate differences between eigenforms the standard MAC (Modal Assurance Criterion) index was designated. The obtained results confirmed effectiveness and correctness of the method presented in paper.

Keywords: eigenproblem, nonprismatic arch, Chebyshev series

DOI: 10.7862/rb.2013.12

Przesłano do redakcji w listopadzie 2012 r.

Przyjęto do druku w czerwcu 2013 r.