CZASOPISMO INŻYNIERII LĄDOWEJ, ŚRODOWISKA I ARCHITEKTURY
JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING, ENVIRONMENT AND ARCHITECTURE
JCEEA, t. XXXI, z. 61 (4/14), październik-grudzień 2014, s. 203-221

Marcin STYRNA[1]

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE DŹWIGARÓW STALOWYCH

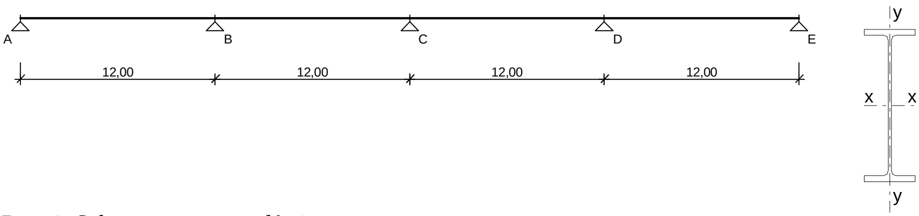
Celem pracy jest analiza wyników otrzymanych podczas projektowania optymalnego kształtowania przekroju. W pracy sformułowano proces zadania optymalizacyjnego, w którym zmiennymi decyzyjnymi są: szerokość pasa, grubość pasa i szerokość środnika. Warunki ograniczające dla wszystkich zadań dotyczyły maksymalnych naprężeń oraz maksymalnego przemieszczenia. Jako funkcję celu wybrano objętość dźwigara. Przyjęto ograniczenia w postaci sumy maksymalnych ugięć od poszczególnych kombinacji obciążeń oraz sumy maksymalnych naprężeń od poszczególnych kombinacji obciążeń. Problem optymalizacji rozwiązano numerycznie w programie DIRCOL 2.1. Rozpatrywano dźwigar stalowy projektowany jako blachownica o dwuteowym przekroju poprzecznym. Dźwigar jest elementem stropu hali magazynowej o konstrukcji rusztu, na którym spoczywa płyta żelbetowa, czteroprzęsłowa o rozstawach przęseł odpowiednio po 12 m. Na dźwigar działają obciążenia stałe (ciężar własny dźwigara, ciężar własny żeber i płyty w postaci sił skupionych) i zmienne (przenoszone na dźwigar w postaci sił skupionych od obciążenia powierzchniowego płyty). Podczas obliczeń uwzględniono pięć najbardziej niekorzystnych przypadków obciążeń oraz szósty jako ciężar własny. Rozpatrywany dźwigar poddano procesowi optymalizacji, gdzie zmiennymi sterującymi były: szerokość pasa (*U*1), grubość pasa (*U*2), grubość środnika (*U*3). W procesie funkcję celu stanowi objętość dźwigara. Każdy stan obciążenia dźwigara można zapisać w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Równania przedstawiono w sytuacjach obliczeniowych od kombinacji nr 1 do 5, które razem tworzą układ równań różniczkowych o 25 niewiadomych. Równania sformułowano w odniesieniu do dźwigara obciążonego ciężarem własnym oraz dźwigara poddanego obciążeniom skupionym. Stosując formalizm zasady maksimum, zestawiono warunki konieczne do optymalizacji. Warunki te pozawalają zbudować tzw. wielopunktowy problem brzegowy dla układu równań różniczkowych (WPPB). Rozwiązanie WPPB jest możliwe na drodze numerycznej z wykorzystaniem programu DIRCOL 2.1. Uzyskane rezultaty zamieszczono na rysunkach dla przypadku *U*1 – zmienna, *U*2 = *U*20, *U*3 = *U*30. Zastosowana metoda okazała się skuteczna.

Słowa kluczowe: dźwigar stalowy, optymalne kształtowanie, objętość dźwigara

[1] Marcin Styrna, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, marcin.styrna@doktoranci.pk.edu.pl

1. Opis techniczny dźwigara

Rozpatrywany jest dźwigar stalowy projektowany jako blachownica o dwuteowym przekroju poprzecznym. Dźwigar jest elementem stropu hali magazynowej o konstrukcji rusztu, na którym spoczywa płyta żelbetowa. Dźwigar jest czteroprzęsłowy o rozstawach przęseł odpowiednio po 12 m. Łączna długość rozpatrywanego dźwigara wynosi 48 m o schemacie statycznym przedstawionym na rys. 1. Przyjęto dwuteownik HEB 900.



Rys. 1. Schemat statyczny dźwigara

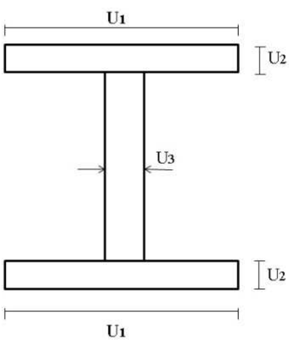
Fig. 1. Static scheme of girder

2. Optymalne kształtowanie

Optymalizacji poddano dźwigar stalowy zaprojektowany jako blachownica o przekroju dwuteowym. Jest to część/element hali magazynowej o konstrukcji rusztu, na którym spoczywa płyta żelbetowa. Elementami struktury formalnej zadania optymalizacji są równania stanu, ograniczenia oraz funkcja celu. Przyjęto trzy zmienne decyzyjne:

- szerokość pasa (U_1 = zmienna),
- grubość pasa ($U_2 = U_{20}$),
- grubość środnika ($U_3 = U_{30}$).

Oznaczenia zmiennych decyzyjnych przedstawia rys. 2.

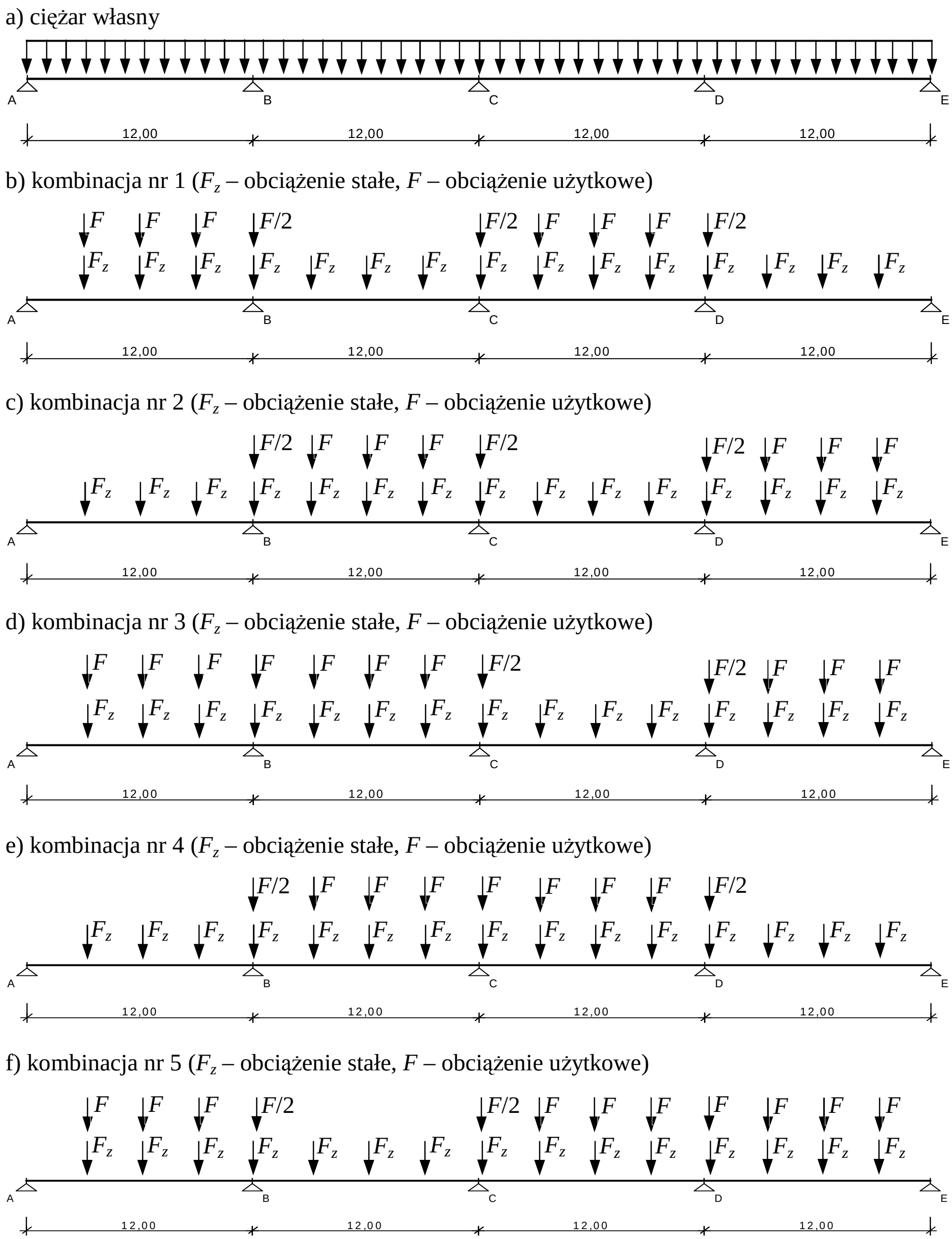


Rys. 2. Oznaczenia zmiennych decyzyjnych

Fig. 2. Designation of decisionvariables

Schematy obciążeń

Na dźwigar działają obciążenia stałe i zmienne. Obciążenia stałe stanowią ciężar własny dźwigara oraz ciężar własny żeber i płyty jako postaci sił skupionych. Obciążenia zmienne są przenoszone na dźwigar w postaci sił skupionych od obciążenia powierzchniowego płyty. Podczas obliczeń uwzględniono pięć najbardziej niekorzystnych przypadków obciążeń (rys. 3., dodatkowym schema-



Rys. 3. Schematy obciążeń

Fig. 3. Load scheme

tem jest szósty ciężar własny). Rozważono sześć różnych schematów obciążeń: ciężar własny oraz pięć kombinacji obciążeń (rys. 3.). Kombinację obciążeń zestawiono w tab. 1.

Tabela 1. Kombinacje obciążeń

Table 1. Load combinations

Stany obciążenia	**Kombinacje obciążeń**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Ciężar własny	+	+	+	+	+
I przęsło	+		+		
II przęsło		+	+	+	
III przęsło	+			+	+
IV przęsło		+	+		+

Struktura zadania optymalizacyjnego

Rozpatrywany dźwigar poddano procesowi optymalizacji [1], w którym zmiennymi sterującymi są: szerokość pasa (U_1), grubość pasa (U_2), grubość środnika (U_3). W procesie funkcję celu stanowi objętość dźwigara. Ograniczeniami są odpowiednio suma maksymalnych ugięć od poszczególnych kombinacji obciążeń oraz suma maksymalnych naprężeń od poszczególnych kombinacji obciążeń.

Równania stanu

Każdy stan obciążenia dźwigara można zapisać w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu [5, 6]:

$$\begin{cases} w' = \varphi \\ \varphi' = \dfrac{M}{EI} \\ M' = Q \\ Q' = -q \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: w – ugięcie belki,
φ – kąt ugięcia,
M – moment zginający,
E – moduł Younga,
I – moduł bezwładności przekroju,
Q – siła poprzeczna,
q – obciążenie ciągłe.

Tabela 2. Zmienne stanu odpowiadające rozpatrywanym kombinacjom

Table 2. State variables of combination

Wariant obciążenia	***w*** **przemieszczenie prostopadłe do osi**	***φ'*** **kąt obrotu**	***M'*** **moment zginający**	***Q'*** **siła poprzeczna**
Ciężar własny	y_1	y_2	y_3	y_4
Kombinacja nr 1	y_5	y_6	y_7	y_8
Kombinacja nr 2	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
Kombinacja nr 3	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
Kombinacja nr 4	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}
Kombinacja nr 5	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
Objętość	y_{25}			

Równania układu (1) przedstawiono w sytuacjach obliczeniowych od kombinacji nr 1 do kombinacji nr 5, które razem tworzą układ równań różniczkowych o 25 niewiadomych. Równania sformułowano w odniesieniu do dźwigara obciążonego ciężarem własnym oraz dźwigara poddanego obciążeniom skupionym (tab. 2.)

Warunki ograniczające

Warunki na minimum maksymalnych naprężeń dla poszczególnych stanów obciążeń:

$$\sigma_{y1} = \frac{|y_3 + y_7| \cdot \left(\frac{h_w}{2} + U_{(2)}\right)}{I} \tag{2}$$

$$\sigma_{y2} = \frac{|y_3 + y_{11}| \cdot \left(\frac{h_w}{2} + U_{(2)}\right)}{I} \tag{3}$$

$$\sigma_{y3} = \frac{|y_3 + y_{15}| \cdot \left(\frac{h_w}{2} + U_{(2)}\right)}{I} \tag{4}$$

$$\sigma_{y4} = \frac{|y_3 + y_{19}| \cdot \left(\frac{h_w}{2} + U_{(2)}\right)}{I} \tag{5}$$

$$\sigma_{y5} = \frac{|y_3 + y_{23}| \cdot \left(\frac{h_w}{2} + U_{(2)}\right)}{I} \tag{6}$$

$$\sigma = \max(\sigma_{y1}, \sigma_{y2}, \sigma_{y3}, \sigma_{y4}, \sigma_{y5}) \tag{7}$$

$$g_1 = \sigma_{dop} - \sigma \geq 0 \tag{8}$$

Warunki na maksymalne przemieszczenia dla poszczególnych kombinacji obciążeń:

$$Y_1 = y_1 + y_5 \tag{9}$$

$$Y_2 = y_1 + y_9 \tag{10}$$

$$Y_3 = y_1 + y_{12} \tag{11}$$

$$Y_4 = y_1 + y_{17} \tag{12}$$

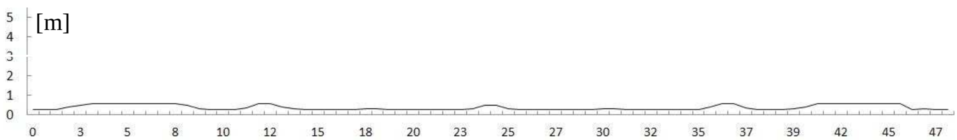
$$Y_5 = y_1 + y_{21} \tag{13}$$

$$Y = \max(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) \tag{14}$$

$$g_2 = Y_{dop} - Y \geq 0 \tag{15}$$

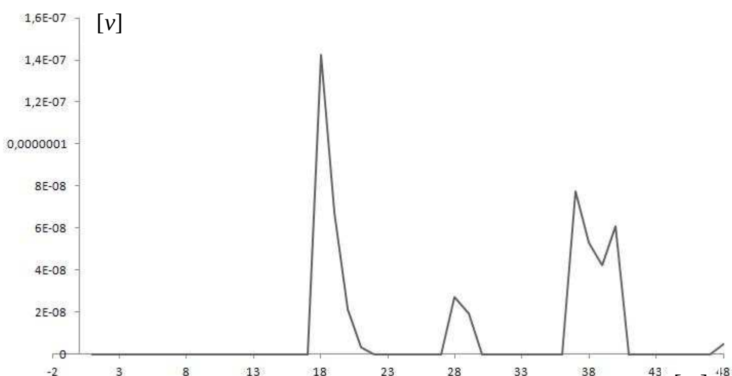
Funkcja Hamiltona w przypadku ograniczeń g_1 i g_2 ma postać [2]:

$$H = \sum_{1}^{25} \lambda_i f_i + v_1 g_1 + v_2 g_2 \tag{16}$$



Rys. 4. Wykres zmiennej decyzyjnej U_1

Fig. 4. Decision variable graph U_1



Rys. 5. Przebieg zmienności współczynnika v_1

Fig. 5. The variation of coefficient v_1

Jeśli ograniczenie g_1 jest aktywne, tzn. $g_1 = 0$, wtedy $v_1 \neq 0$. Analogicznie, jeżeli $g_2 = 0$, to $v_2 \neq 0$. Na rysunku 4. przedstawiono rzeczywisty rozkład zmiennej decyzyjnej U_1), a na rys. 5. przebieg zmienności współczynnika v_1.

Tabela 3. Tablica aktywności ograniczeń i zmian sterowania U_x

Table 3. Activity of limitations and control change U_x

Odległość	**Stan graniczny nośności**	**Stan graniczny użytkowania**	***U*(*x*)**
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
0.7500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
1.5000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
2.2500000	0.0000000	0.0000000	0.40501824
2.6250000	0.0000000	0.0000000	0.50892533
3.0000000	0.0000000	0.0000000	0.58330190
3.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
4.5000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
5.2500000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
5.6250000	0.0000000	1721.2869	0.6000000
6.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
6.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
7.5000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
8.2500000	0.0000000	0.0000000	0.50542889
9.0000000	0.0000000	0.0000000	0.33066936
9.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
9.7500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
10.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
11.250000	0.14249648E-06	0.0000000	0.38434192
12. 000000	0.67021065E-07	0.0000000	0.56900721
12.000000	0.21362107E-07	0.0000000	0.56900721
12.750000	0.30512665E-08	0.0000000	0.39949036
13.500000	0.0000000	0.0000000	0.30530161
15.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
15.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
15.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
16.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
17.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
18.000000	0.27158708E-07	0.0000000	0.32487584
18.000000	0.19358764E-07	0.0000000	0.32487584
18.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
19.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
20.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
21.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
21.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
21.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
22.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000

Tabela 3. (cd.)

Table 3. (contd.)

Odległość	**Stan graniczny nośności**	**Stan graniczny użytkowania**	***U*(*x*)**
23.250000	0.77588551E-07	0.0000000	0.32727935
24.000000	0.53136202E-07	0.0000000	0.48391824
24.000000	0.42307845E-07	0.0000000	0.48391824
24.7500000	0.60917372E-07	0.0000000	0.32722199
25.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
26.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
27.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
27.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
27.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
28.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
29.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
30.000000	0.48496261E-08	0.0000000	0.32515270
30.000000	0.34771283E-08	0.0000000	0.32515270
30.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
31.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
32.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
33.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
33.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
33.750000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
34.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
35.250000	0.10961423E-07	0.0000000	0.39996301
36.000000	0.75345418E-08	0.0000000	0.56945891
36.000000	0.47855655E-08	0.0000000	0.56945891
36.750000	0.68786277E-08	0.0000000	0.38479760
37.500000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
38.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
39.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
39.000000	0.0000000	0.0000000	0.31689934
39.750000	0.0000000	0.0000000	0.40464880
40.500000	0.0000000	0.0000000	0.56736559
42.000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
42.000000	0.0000000	1.2565501	0.6000000
42.375000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
42.750000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
43.500000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
45.000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
45.000000	0.0000000	0.0000000	0.6000000
45.750000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
46.500000	0.0000000	0.0000000	0.33666999
47.250000	0.0000000	0.0000000	0.3000000
48.000000	0.0000000	0.0000000	0.3000000

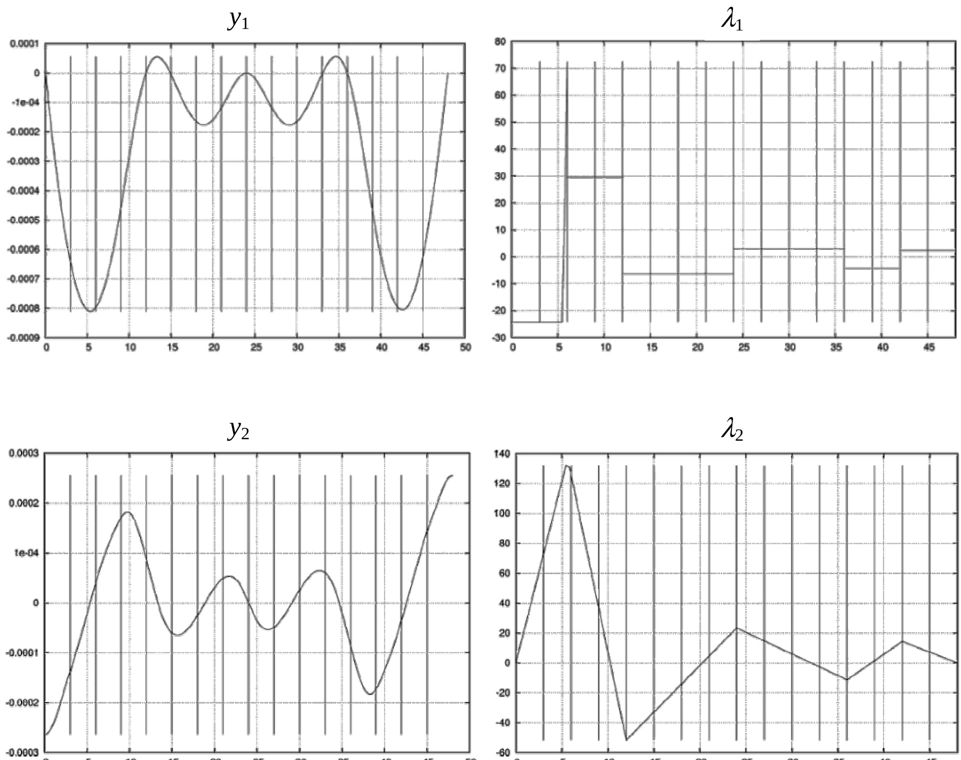
Warto zauważyć, że ograniczenie g_2 nie zależy jawnie od sterowania (U_1, U_2, U_3) i jest aktywne tylko punktowo (tab. 3.) [3]. Na podstawie teorii sterowania optymalnego zmienna decyzyjna U_1 ma następującą strukturę:

$$U_1 = \begin{cases} U_{10} \text{ – ograniczenie geometryczne,} \\ U \text{ – sterowanie wynikające z warunku } \dfrac{\partial H}{\partial U} = 0, \\ U^{\sigma} \text{ – sterowanie wynikające z warunku } g_2 = 0. \end{cases}$$

Szczegółowe określenie tej struktury jest możliwe na drodze numerycznej. W tym celu zastosowano program Dircol-2.1.

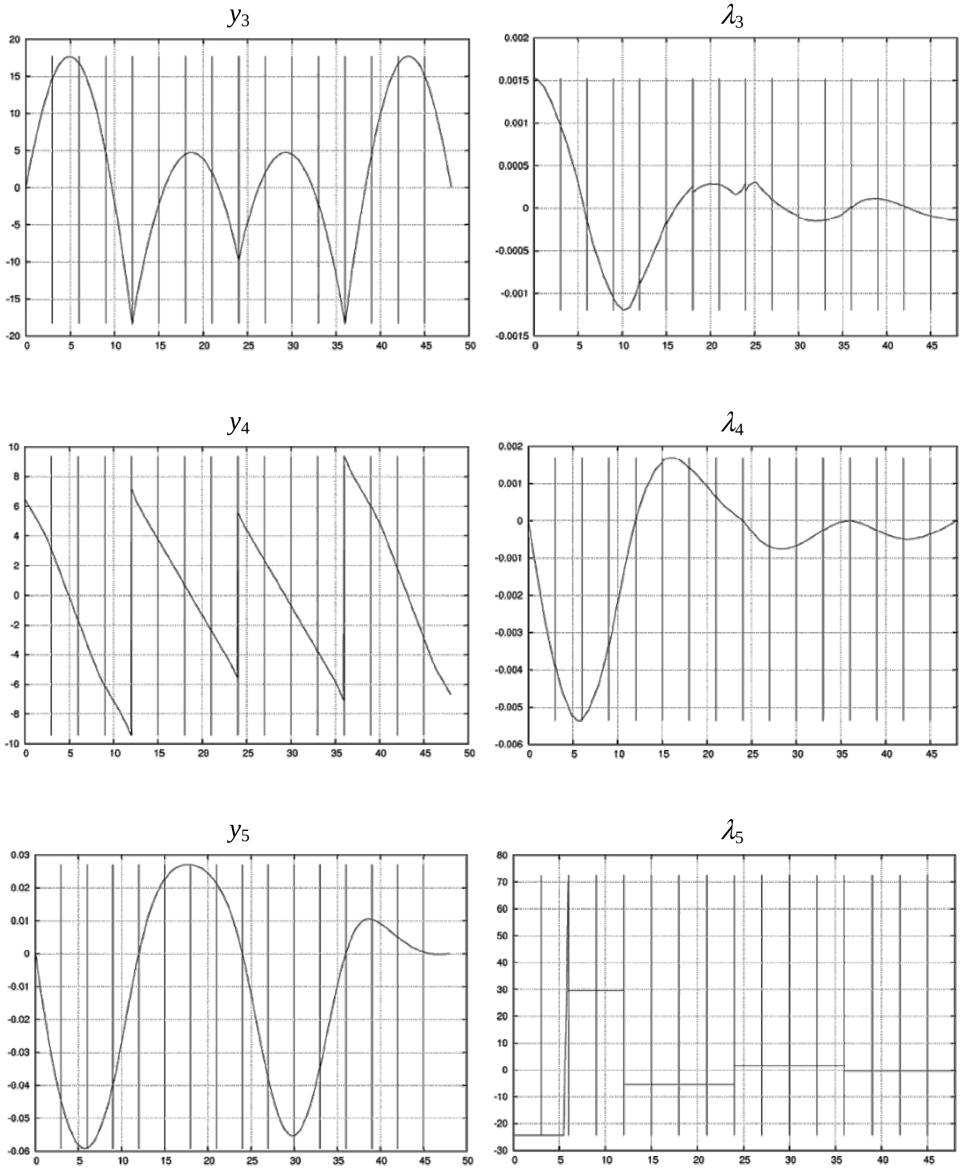
3. Wyniki numeryczne rozwiązania optymalnego

Dla przyjętych danych uzyskano rozwiązanie optymalne (y_i, λ_i), które zestawiono na rys. 6. Funkcję Hamiltona przedstawia rys. 7.



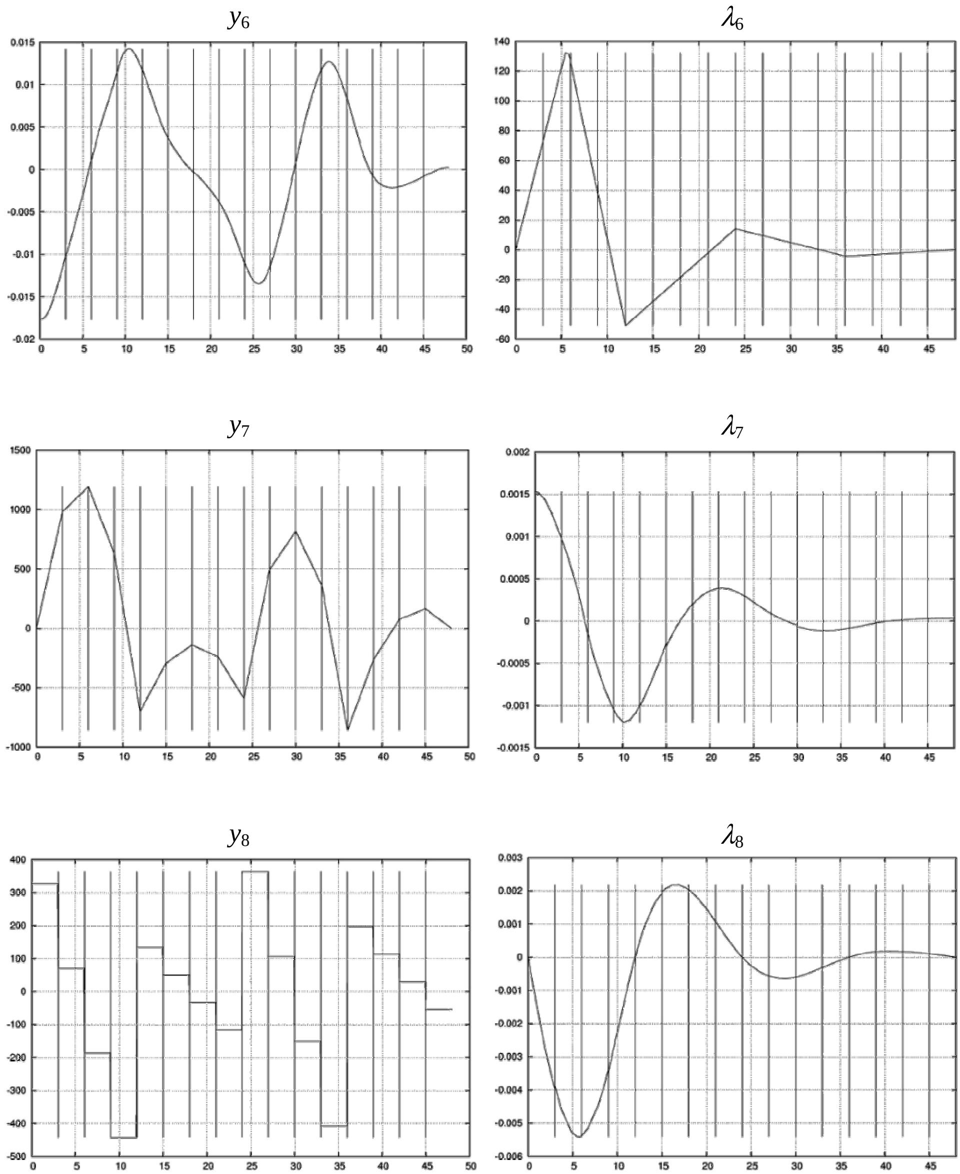
Rys. 6. Rozwiązanie optymalne (y_i, λ_i)

Fig. 6. Optimal solution (y_i, λ_i)



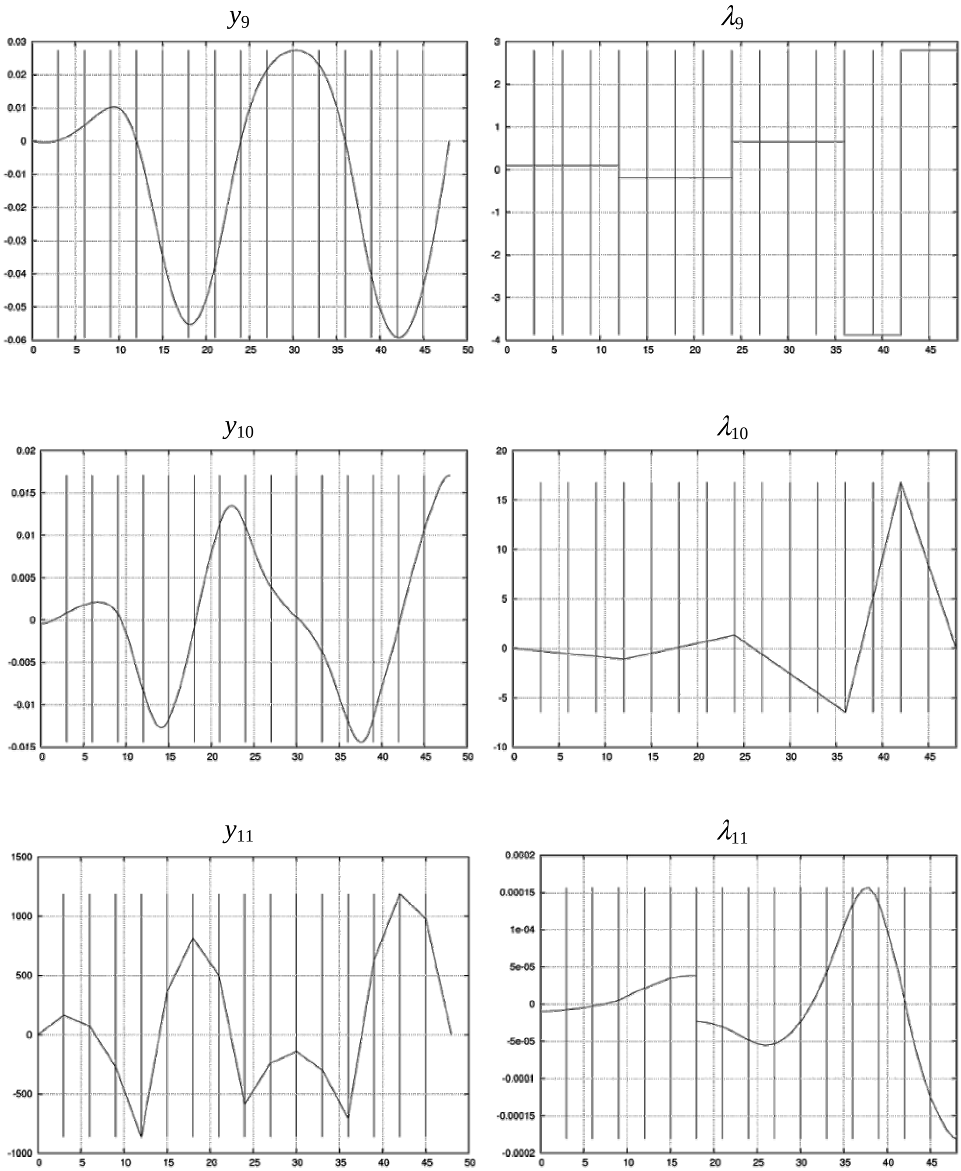
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



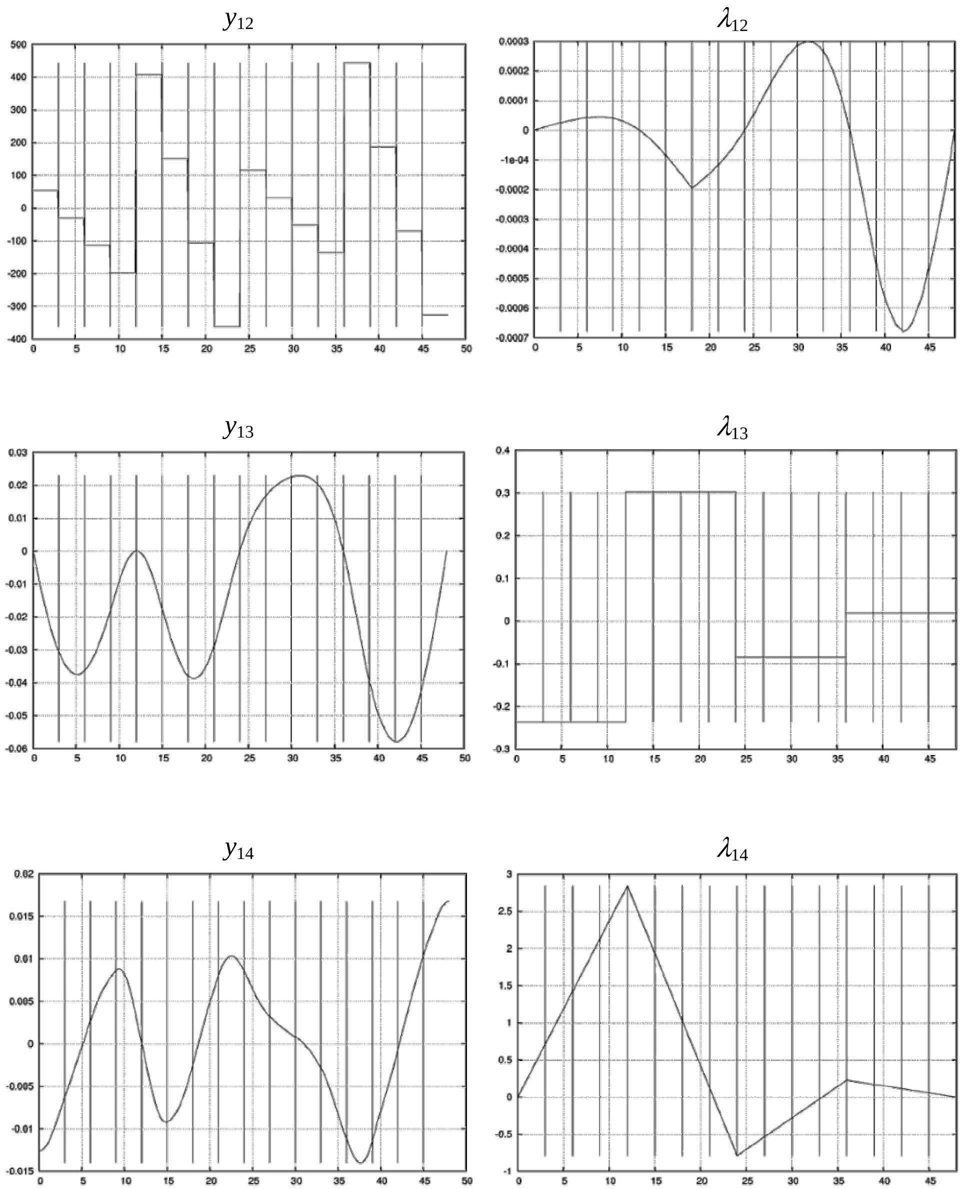
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



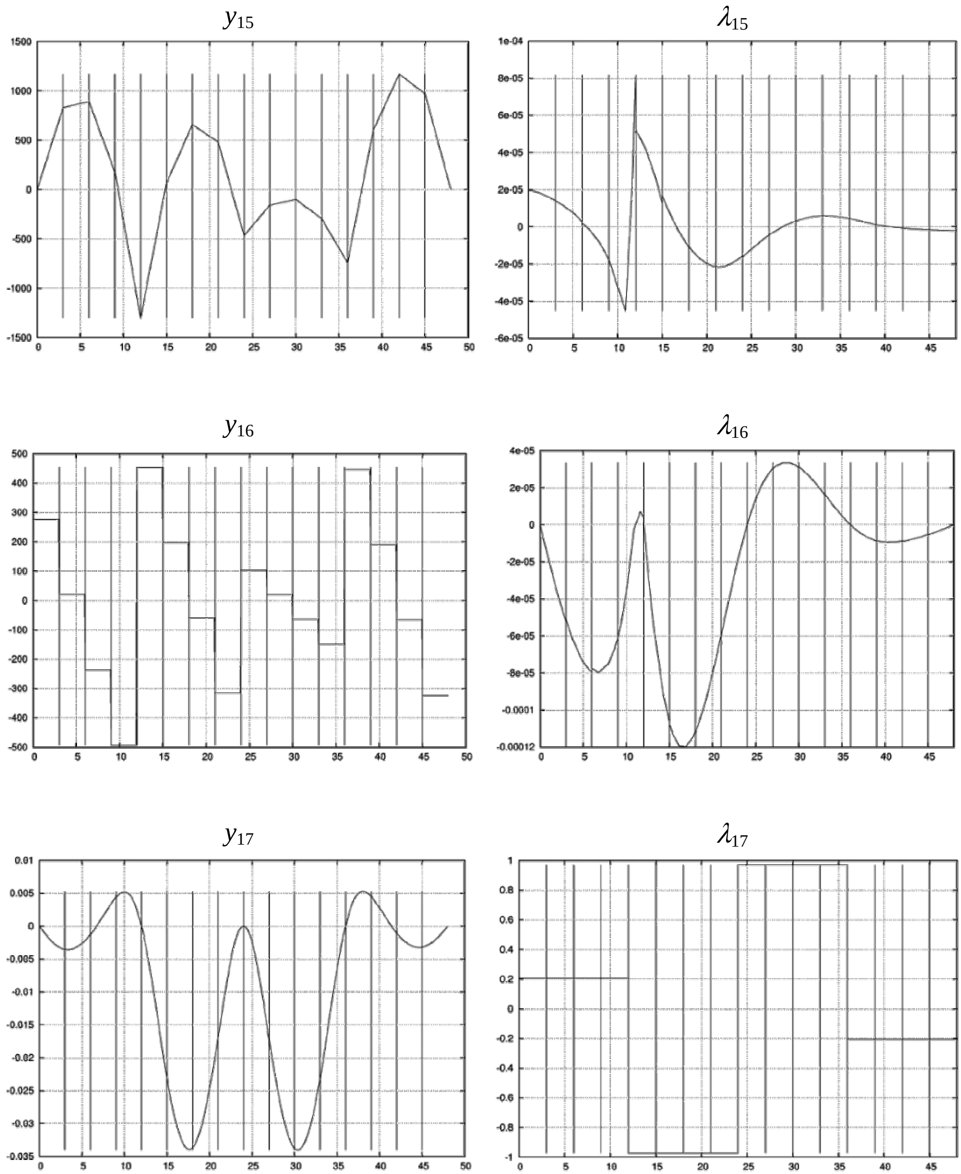
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



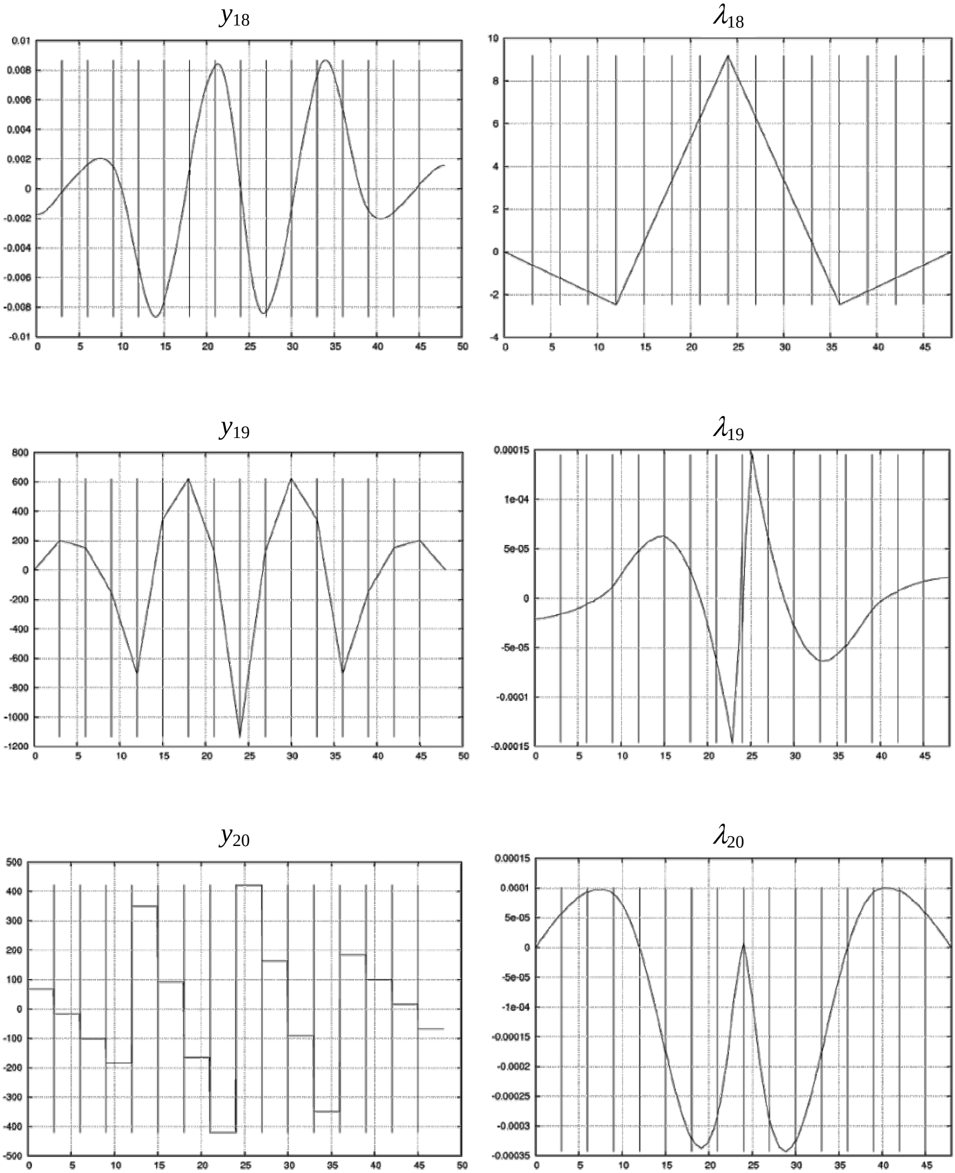
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



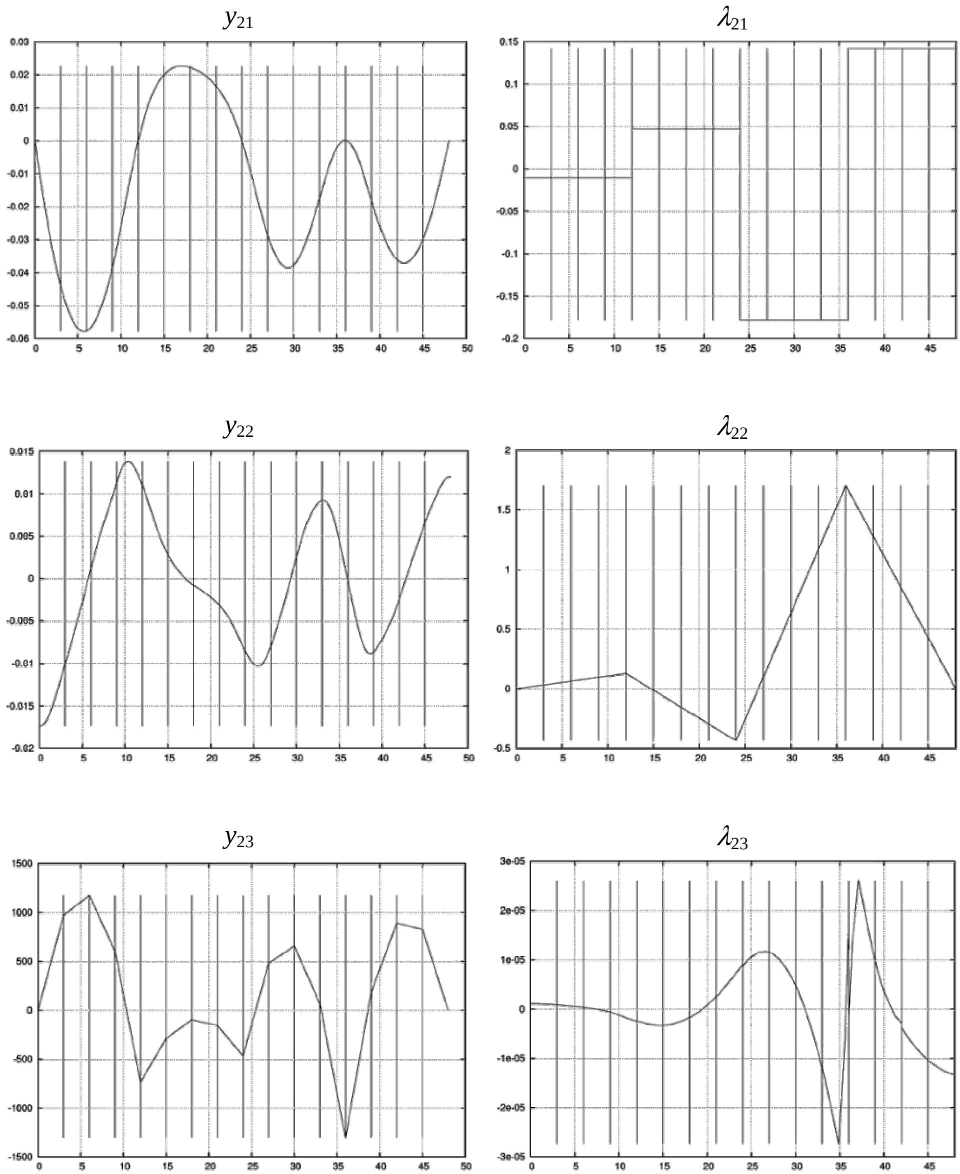
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



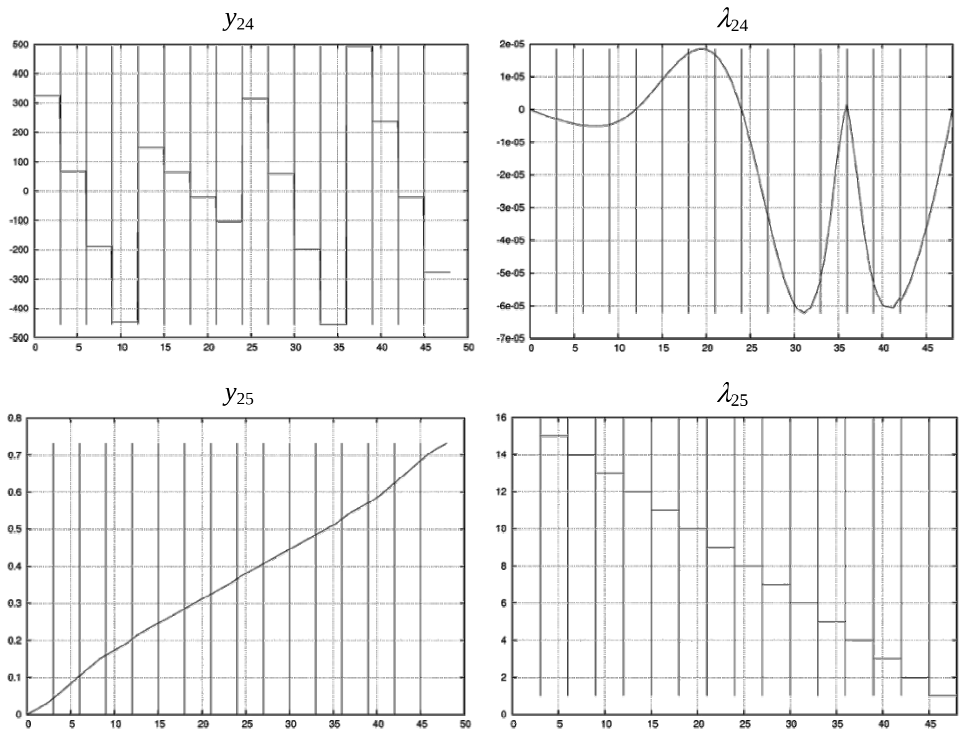
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



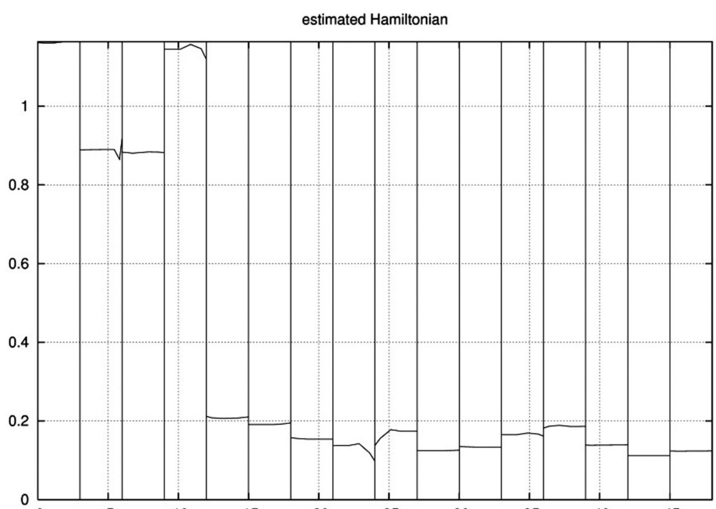
Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



Rys. 6. (cd.)

Fig. 6. (contd.)



Rys. 7. Funkcja Hamiltona

Fig. 7. Hamiltonian function

Uzyskane rezultaty numeryczne spełniają dodatkowe warunki [4]:

$$\begin{cases} y_i(x_i) = 0 & \rightarrow \ \lambda_i(x_i^+) = \lambda_i(x_i^-) + C_i, \\ y_i(x_i^+) = y_i(x_i^-) + D_i & \rightarrow \ \lambda_i(x_i), \end{cases}$$

co potwierdza spełnienie warunków koniecznych do optymalizacji.

4. Wnioski

Stosując formalizm zasady maksimum, zestawiono warunki konieczne do optymalizacji. Warunki te pozwalają zbudować tzw. wielopunktowy problem brzegowy dla układu równań różniczkowych (WPPB). Rozwiązanie WPPB jest możliwe na drodze numerycznej z wykorzystaniem programu Dircol 2.1. Otrzymane rezultaty zamieszczono na rysunkach dla przypadku U_1 – zmienna, $U_2 = U_{20}$, $U_3 = U_{30}$. Zastosowana metoda okazała się skuteczna. Uzyskano rozwiązanie optymalne, pokazując także aktywność ograniczeń.

Literatura

[1] Bodnar A.: Wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2003.

[2] Kowalski J.: Modelowanie obiektów konstrukcyjnych w projektowaniu optymalnym. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1983.

[3] Mikulski L.: Optymalne kształtowanie sprężystych układów prętowych. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.

[4] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.

[5] Piechnik S.: Wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.

[6] Rumatowski K., Królikowski A., Kasiński A.: Optymalizacja układów sterowania. Zadania. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1984.

OPTIMIZATION OF STEEL GIRDER

Summary

The existing publication considering the optimal design of a steel girder in view of control theory. The formal structure components for the optimization problems in which the necessary optimization conditions are determined by maximum principle include: state equations, constraints and optimization objective function. In this process of optimization the objective function is weight of the steel nave. Constraints are: maximum stress in load combinations from 1 to 5 and acceptable deflection. Problem solved by program DIRCOL 2.1. In the work main model is design as a I-beam plate girder. Girder is a part of a steel hall ceiling. Girder has 4 spans with 12 m spacing each. The girder is subjected to permanent and variable loads. The static loads: the self-weight of the girder and the self-weight of the ribs and slab (concentrated loads). The variable load: applied to the slab, which is transmitted to the girder in the form of concentrated forces. The girder was considered to the optimization process with control variables: the width of the belt (*U*1), the thickness of the belt (*U*2), the thickness of the web (*U*3). The objective function is the volume of the girder. In total, combinations of 1 to 5 form 25 differential equations. These conditions allows a build issue can be solved that by using a numerical program DIRCOL 2.1. Result of the work are presented in the drawings for: *U*1 – variable, *U*2 = *U*20, *U*3 = *U*30. The applied method proved successful.

Keywords: optimization, steel girder, volume of the girder

Przesłano do redakcji: 26.09.2014 r.
Przyjęto do druku: 02.12.2014 r.

DOI:10.7862/rb.2014.138