#### CZASOPISMO INŻYNIERII LĄDOWEJ, ŚRODOWISKA I ARCHITEKTURY JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING, ENVIRONMENT AND ARCHITECTURE JCEEA, t. XXXI, z. 61 (3/I/14), lipiec-wrzesień 2014, s. 229-239

Andrzej RAGANOWICZ<sup>1</sup> Józef DZIOPAK<sup>2</sup>

## GRAFICZNA ESTYMACJA PARAMETRÓW ROZKŁADU *WEIBULL'A* DO WYZNACZANIA TEORETYCZNYCH FUNKCJI NIEZAWODNOŚCI

W artykule przedstawiono schemat graficznej estymacji parametrów rozkładu We*ibull'a.* Wyznaczone graficznie parametry żywotności charakterystycznej T i stromości rozkładu b pozwalają skonstruować teoretyczną funkcję niezawodności R(t) dla każdej klasy stanu technicznego sieci kanalizacyjnej. Funkcje te są z kolei podstawą do opracowania statystycznej prognozy stanu technicznoeksploatacyjnego, która jest jedną z możliwości kwalifikowanego planowania odnowy analizowanego liniowego obiektu jakim jest sieć kanalizacyjna.

Slowa kluczowe: systemy kanalizacyjne, kamionkowa sieć bytowo-gospodarcza, inspekcja optyczna, klasyfikacja realna stanu technicznego sieci, prognozowanie stanu technicznego sieci

## 1. Wstęp

Wyniki pełnozakresowej inspekcji optycznej bytowo-gospodarczej sieci kamionkowej o długości prawie 40 km w zakresie średnic od DN 200 do 400 mm, eksploatowanej w bawarskiej gminie Unterhaching w Niemczech, pozwoliły na sklasyfikowanie planowanych zabiegów renowacyjnych - najpierw w oparciu o wytyczną ATV-M 149 [1], a następnie według klasyfikacji realnej, która uwzględnia warunki technologiczno-wykonawcze. Opracowane w ten sposób dane przedmiotowej sieci były podstawą do przeprowadzenia statystycznych badań stanu technicznego odcinków sieci w kontekście ich wieku. Wyniki przeprowadzonych badań, a zwłaszcza empiryczny rozkład gęstości prawdopodobieństwa sugerowały za zasadne zastosowanie

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Zweckverband zur Abwasserbeseitigung im Hachinger Tal, 82024 Taufkirchen, Germany, telefon: + 49 (89) 6155903, a-raganowicz@t-online.de

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Autor do korespondencji: Politechnika Rzeszowska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Infrastruktury i Ekorozwoju 35-959 Rzeszów, al. Powstańców Warszawy 6, telefon: + 48 17 865 1817, e-mail: jdziopak@prz.edu.pl

dwuparametrowego statystycznego rozkładu *Weibull'a* w celu wyznaczenia teoretycznych funkcji niezawodności i opracowania na tej podstawie prognozy stanu technicznego przedmiotowej infrastruktury sieci kanalizacyjnej.

Zasadniczym problemem analiz niezawodnościowych bazujących na tym modelu jest estymacja jego dwóch charakterystycznych parametrów, które odnoszą się do technicznej żywotności charakterystycznej T i stromości rozkładu b. Jedną z możliwych dróg poszukiwania rozwiązań jest zastosowanie metody graficznej, która w odniesieniu do stopnia dokładności nie może konkurować z metodami analitycznymi. Natomiast jej podstawową zaletą jest to, że umożliwia ona szybkie ustalanie wartości obydwu parametrów.

W publikacji opisano metodykę graficznej estymacji parametrów rozkładu *Weibull'a* w celu wyznaczenia teoretycznych funkcji niezawodności (przejścia). Opisują one ustalone granice pomiędzy stanami techniczno-eksploatacyjnymi, rozpoczynając od stanu najlepszego bez uszkodzeń aż do stanu zwanego krytycznym, którego odpowiednikiem w praktyce może być katastrofa budowlana.

### 2. Metodyka graficznej estymacji parametrów rozkładu Weibull'a

Stosując specjalną siatkę prawdopodobieństwa można przedstawić przebieg funkcji awaryjności według dwuparametrowego rozkładu *Weibull'a* mającej kształt litery *S* (rys. 1) do postaci pewnej prostej. Transformacja krzywej w prostą (rys. 2) jest możliwa dzięki przyjęciu logarytmicznej skali dla osi odciętych oraz podwójnie logarytmicznej skali dla osi rzędnych. Opracowanie siatki prawdopodobieństwa oraz wyznaczenie graficzne parametrów rozkładu *Weibull'a* oparte jest na przekształceniu wzoru (1)

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)^{b}$$
(1)

do postaci [2, 3, 4] zależności (2)

$$\ln\left(-\ln\left(1-F(t)\right)\right) = b\left(\ln t - \ln T\right) \tag{2}$$

Dokonując porównania funkcji opisującej w ogólnej postaci równanie prostej ze wzoru (3)

$$y = mx + c \tag{3}$$

można z formuły (2) ustalić następujące zależności:

• nachylenie prostej: m = b (4)

231

(5)

(6)

- stała:  $c = -b \ln T$ ,
- skala osi odciętych:  $x = \ln t$ ,
- skala osi rzędnych:  $y = \ln(-\ln(1 F(t)))$ . (7)





W wyniku powyżej przeprowadzonej transformacji otrzymuje się wektor funkcji F(t) w postaci pewnej prostej w układzie x - y. Każdy dwuparametrowy rozkład *Weibull'a* wystąpienia awarii można przedstawić w postaci określonej prostej. Poprzez równoległe przesunięcie wyznaczonej prostej *Weibull'a* do punktu początkowego bieguna *Pol* 1 wyznacza się graficznie parametry prostej, względnie parametr stromości rozkładu *b* (rys. 3).



Rys. 2. Przebieg funkcji awaryjności F(t) w logarytmicznej i podwójnie logarytmicznej skali Fig. 2. Progress of the failure F(t) in logarithmic and double logarithmic scale



Rys. 3. Wyznaczanie parametrów *b* i *T* metodą graficzną dla klasy przejścia KO 5-3 Fig. 3. Determination of the parameters *b* and *T* graphical method for a class of transition KO 5-3

Na podstawie zależności (4)÷(7) można ustalić położenie bieguna *Pol* 1 oraz liniową skalę osi rzędnych, na której odczytuje się bezpośrednio wartość parametru *b* [2, 3, 4] z podanych zależności (8) i (9):

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8}$$

$$b = \frac{\ln(-\ln(1 - F_2(t_2))) - \ln(-\ln(1 - F_1(t_1)))}{\ln(x_2 - x_1)}$$
(9)

Drugi parametr rozkładu określa charakterystyczną żywotność techniczną *T*, którą oblicza się z punktu przecięcia prostej *Weibull'a* z osią y [2, 3, 4] jako

$$T = -m \cdot \ln T \tag{10}$$

Metodę graficznego wyznaczania parametrów *b* i *T* w oparciu o siatkę prawdopodobieństwa *Weibull'a* przedstawiono na rysunku 3.

Dalsze szczegóły tej metody omówiono na przykładzie empirycznej funkcji przejścia od trzeciej do drugiej klasy odnowy (KO 5-3). W skład analizowanej próby losowej wchodziły łącznie 1.122 odcinki kamionkowej sieci bytowogospodarczej, a rozkład ich wieku miał charakter rozkładu *Weibull'a*. Wyznaczanie parametrów *T* i *b* metodą graficzną zrealizowano w pięciu fazach.

#### 2.1. Faza 1 – przygotowanie danych empirycznych

Odcinki badanej sieci należące do trzeciej klasy przejścia KO 5-3 zostały posortowane rosnąco według ich wieku i przedstawione w tabeli 1.

| KO 5-3<br>Grupa wiekowa<br>(lata) | Liczba odcinków<br>(sztuki) |  |
|-----------------------------------|-----------------------------|--|
| 5                                 | 56                          |  |
| 10                                | 98                          |  |
| 15                                | 92                          |  |
| 20                                | 70                          |  |
| 25                                | 109                         |  |
| 30                                | 484                         |  |
| 35                                | 190                         |  |
| 40                                | 1                           |  |
| 45                                | 22                          |  |
|                                   | $\Sigma = 1.122$            |  |

Tabela 1. Odcinki sieci wchodzące w skład klasy KO 5-3 Table 1. Sections of the network belonging to the class KO 5-3

# 2.2. Faza 2 – ustalenie wartości prawdopodobieństwa przejścia odcinków od trzeciej do drugiej klasy odnowy

Prawdopodobieństwo przejścia odcinków od trzeciej do drugiej klasy odnowy F(t) dla poszczególnych grup wiekowych  $t_i$  zostało ustalone na podstawie przybliżonego wzoru dla średniej wartości funkcji awaryjności

$$F(t_i) = \frac{G_i}{1+n} \tag{11}$$

gdzie: Gi-zsumowana liczba odcinków odpowiedniej grupy wiekowej,

*n* – liczba odcinków danej klasy przejścia.

Powyższa zależność jest ważna dla próby losowej liczącej ponad 50 elementów (n > 50). Średnie wartości prawdopodobieństwa przejścia  $F_{50\%}(t_i)$  dla trzeciej klasy przejścia zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Prawdopodobieństwo przejścia odcinków sieci od trzeciej do drugiej klasy odnowy (KO 5-3)

| Grupa wiekowa<br>(lata) | Liczba odcinków<br>(sztuki) | G <sub>i</sub><br>(sztuki) | $F_{50\%}(t_i)$ (%) |
|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------|
| 5                       | 56                          | 56                         | 4,99                |
| 10                      | 98                          | 154                        | 13,71               |
| 15                      | 92                          | 246                        | 21,91               |
| 20                      | 70                          | 316                        | 28,14               |
| 25                      | 109                         | 425                        | 37,85               |
| 30                      | 484                         | 909                        | 80,94               |
| 35                      | 190                         | 1099                       | 97,86               |
| 40                      | 1                           | 1100                       | 97,95               |
| 45                      | 22                          | 1122                       | 99,91               |
|                         | $\Sigma = 1.122$            |                            |                     |

Table 2. Transition probability of network sections from the third to second class health (KO 5-3)

#### 2.3. Faza 3 – naniesienie wartości prawdopodobieństwa przejścia odcinków sieci od trzeciej do drugiej klasy odnowy na siatkę prawdopodobieństwa *Weibull'a*

Wartości prawdopodobieństwa  $F_{50\%}(t_i)$  odpowiadają wartościom rzędnych, a grupy wiekowe wartościom na osi odciętych (rys. 3).

#### 2.4. Faza 4 – wyznaczenie prostej Weibull'a

W obrębie naniesionych punktów zostaje przeprowadzona najważniejsza linia, jaką jest prosta *Weibull'a*. Im większa jest koncentracja punktów wzdłuż przybliżonej prostej, to tym większe jest prawdopodobieństwo, że zasadnicza część badanej próby losowej charakteryzuje się rozkładem, który odpowiada założonemu rozkładowi *Weibull'a* (rys. 3).

#### 2.5. Faza 5 – graficzne wyznaczenie parametrów rozkładu Weibull'a

Charakterystyczną żywotność techniczną T odczytuje się na osi odciętych w miejscu, w którym linia odpowiadająca prawdopodobieństwu 63,2% przecina prostą *Weibull'a*. Wartość tą uzyskuje się na podstawie zależności (1), gdy czas eksploatacji obiektu t jest równy żywotności technicznej T

$$F(t=T) = 1 - \exp\left(\frac{-T}{T}\right) = 1 - \frac{1}{e} = 0,632 = 63,2\%$$

Natomiast wartość stromości rozkładu *b* ustala się w ten sposób, że prostą *Weibull'a* przesuwa się równolegle do punktu początkowego bieguna *Pol* 1, znajdującego się na osi odciętych. Punkt przecięcia tej prostej z prawą krawędzią siatki prawdopodobieństwa, która posiada skalę liniową, odpowiada wartości parametru *b* (rys. 3).

Na podstawie parametrów b i T oszacowanych graficznie skonstruowano teoretyczną funkcję niezawodności, która opisuje przejście odcinków sieci od trzeciej do drugiej klasy odnowy. Funkcja ta przyjęła postać równania (12)

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left(\frac{-t}{25,0}\right)^{2,37}$$
(12)

W oparciu o graficznie oszacowane parametry rozkładu *Weibull'a* oraz formułę (12) skonstruowano teoretyczną krzywą prawdopodobieństwa niezawodności, która wyznacza granicę oddzielającą obszar stanu technicznego przewodów wymagających zabiegów o charakterze konserwacyjnym i stanem przewodów wymagających przeprowadzenia rehabilitacji technicznej (rys. 4). Powierzchnia znajdująca się poniżej krzywej niezawodności wskazuje na konserwację, a powierzchnia powyżej na odnowę. Cechami charakterystycznymi tej krzywej jest relatywnie mała stromość (b = 2.37) i stosunkowo krótka żywotność charakterystyczna (T = 25 lat). Ustalony na podstawie rysunku 4 zakres niezbędnej odnowy dla 20-letnich odcinków przewodów kanalizacyjnych wyniósł 44,5%. Poprzez zsumowanie potrzeb renowacyjnych dla wszystkich grup wiekowych można określić konieczny zakres odnowy dla całego obiektu i na tej podstawie opracować krótko i długoterminowe plany inwestycyjne. Realizacja prognozowanego zakresu inwestycji zapewni przedłużenie żywotności technicznej odnowionych przewodów o przynajmniej 40 lat.



Rys. 4. Teoretyczna krzywa niezawodności skonstruowana na podstawie graficznej estymacji parametrów Weibull'a

Fig. 4. The theoretical curve constructed on the basis of the reliability of graphical estimation of parameters Weibull `a

Punkt przegięcia, od którego wyraźnie wzrasta stromość tej krzywej, występuje po upływie 15-letniej eksploatacji badanej sieci. Oznacza to, że w tej początkowej fazie eksploatacji tylko niewielka liczba badanych przewodów wymaga realizacji zabiegów renowacyjnych. Maksymalnie żywotność techniczna odcinków należących do trzeciej klasy odnowy (KO 5-3) wynosi 55 lat. Wyniki powyższych badań statystycznych można uznać za miarodajne, ponieważ potwierdzają one generalnie doświadczenia zebrane w ramach wieloletniej eksploatacji badanej sieci bytowo-gospodarczej gminy Unterhaching.

Postępując zgodnie z zaproponowanym schematem można na podstawie oszacowanych metodą graficzną parametrów rozkładu *Weibull'a* wyznaczyć funkcje niezawodności przy ustalaniu przejścia R(t) dla pozostałych klas odnowy.

#### 3. Obszar zaufania

W przypadku prowadzenia analiz tego typu ważne jest określenie tak zwanego obszaru zaufania, który definiuje jakość uzyskanych wyników analizy. Powszechnie przyjmuje się, że poprawność, czy też wiarygodność pewnego wyniku badań powinna wynosić  $P_A = 90\%$ . W kontekście badanej klasy przejścia KO 5-3 oznaczałoby to 90% prawdopodobieństwo, że wyznaczona graficznie prosta *Weibull'a* stanowi optymalne rozwiązanie. Wartość tego prawdopodobieństwa jest rezultatem przyjęcia 5% oraz 95% granicy zaufania, które określają funkcje prawdopodobieństwa wystąpienia awarii  $F_{5\%}(t_i)$  oraz  $F_{95\%}(t_i)$ , zgodnie z następującymi formułami [2, 3, 4]:

$$0,05 = \sum_{k=j}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} F(t)^{k} \cdot (1 - F(t))^{n-k}$$
(13)

$$0,95 = \frac{n!}{k!(n-k)!} F(t)^k (1-F(t))^{n-k}$$
(14)

Jeżeli wartości obu powyżej zapisanych funkcji zostaną naniesione na siatkę prawdopodobieństwa, to prosta *Weibull'a* będzie przebiegała pomiędzy dwoma granicami zaufania (rys. 4).



Rys. 5. Prosta *Weibull'a* w logarytmicznym układzie z parametrami *b* i *T* Fig. 5. Simple Weibull in logarithmic system parameters *b* and *T* 

Wprowadzenie granic zaufania do analizy statystycznej jest uzasadnione tylko w przypadku, gdy próba losowa liczy mniej niż 50 jednostek (n < 50). Ponieważ analizowana klasa przejścia KO 5-3 składała się aż z 1.122 odcinków sieci, dlatego też sprawdzenie granic zaufania nie było celowe. W tym wypadku obszar zaufania byłby bardzo wąski i pokrywałby się z prostą *Weibull'a*.

Graficzna metoda wyznaczania parametrów rozkładu *Weibull'a* stanowi na pewno bardzo szybki i praktyczny sposób rozwiązywania wielu problemów z zakresu określania żywotności technicznej różnego typu obiektów budowlanych, szczególnie wtedy, gdy analizowana jest niewielka próba losowa. Elementy takiej próby należy poddać określonej klasyfikacji i następnie stosując tą metodę można bardzo szybko oszacować parametry *Weibull'a*. Metoda graficzna umożliwia wyznaczenie tylko orientacyjnych wartości parametrów *Weibull'a*, które mogą ukierunkować oraz zweryfikować ich dalsze badania przy zastosowaniu metod analitycznych.

#### 4. Podsumowanie

Metoda graficzna daje możliwość szybkiego, ale niezbyt dokładnego szacownia parametrów rozkładu *Weibull'a*. W sensie dokładności nie może ona zastąpić metod analitycznych, ale może stanowić dobrą bazę do ich weryfikacji. Do popularnych metod analitycznego szacowania parametrów rozkładu *Weibull'a* należą:

- metoda regresji liniowej i najmniejszych kwadratów,
- metoda momentów,
- metoda Maximum-Likelihood,
- metoda Gumbel'a.

Metody analityczne są bardzo czasochłonne, szczególnie w przypadku dużych prób losowych, a ich sprawne przeprowadzenie obliczeń wymaga opracowania odpowiednich algorytmów. W celu zwiększenia dokładności metod analitycznych można je połączyć z estymacją parametrów Weibull'a w oparciu o symulacje matematyczne metodą Monte-Carlo. Zastosowanie tej metody pozwala na dowolne zwiększenie liczebności badanych prób losowych. Fakt ten ma szczególnie duże znaczenie, gdy badania musza być oparte na małej bazie danvch empirycznych. Dlatego prognozowanie stanu technicznoeksploatacyjnego liniowych obiektów kanalizacyjnych ta metoda wymaga znacznie dłuższych czasów obliczeniowych, ale w konsekwencji prowadzi do uzyskania dokładniejszych wyników analiz ilościowych, jak również jakościowych.

W innych publikacjach z tego cyklu autorzy opisali algorytmy obliczeniowe dla czterech wymienionych metod analitycznej estymacji parametrów rozkładu *Weibull'a*. Dzięki temu powstała możliwość porównania wartości parametrów szacowanych graficznie z ustalonymi analitycznie. Na bazie parametrów rozkładu można wyznaczyć teoretyczne funkcje niezawodności (przejścia) R(t), które tworzą podstawę opracowania wiarygodnej prognozy stanu techniczno-eksploatacyjnego sieci kanalizacyjnej. Ilościowa analiza takiej prognozy umoż-liwia przede wszystkim ustalenie koniecznego zakresu zabiegów renowacyjnych oraz wielu istotnych aspektów eksploatacyjnych starzenia się liniowych obiektów kanalizacyjnych. Rehabilitacja techniczna (renowacja) jest najdroższym i najważniejszym komponentem eksploatacji sieci i dlatego wymaga ona kwalifikowanego planowania. Jedną z możliwości takiego właśnie planowania jest statystyczna prognoza stanu techniczno-eksploatacyjnego sieci. Wyniki prognozy są nie tylko niezbędnym instrumentem zarządzania obiektami infrastruktury kanalizacyjnej, ale również podstawą ich racjonalnej eksploatacji.

#### Literatura

- [1] Merkblatt ATV-M 149, Zustandserfassung, -klassifizierung und –bewertung von Entwässerungssystemen außerhalb von Gebäuden, 1999.
- [2] Weibull W.: A statistical distribution function of wide applicability, Trans. ASME, Serie E: Journal of Appl. Mechanics 18, 1951.
- [3] Wilker H.: Weibull-Statistik in der Praxis, Leitfaden zur Zuverlässigkeitsermittlung technischer Produkte, Verlag: Books on Demand GmbH, Nordestedt 2004.
- [4] Wilker H.: Weibull-Statistik in der Praxis, Leitfaden zur Zuverlässigkeitsermittlung technischer Komponenten, Verlag: Books on Demand GmbH, Nordestedt 2010.

#### **GRAPHIC ESTIMATION OF WEIBULL DISTRIBUTION PARAMETERS FOR DETERMINATION OF THEORETICAL RELIABILITY FUNCTIONS**

#### Summary

This paper presents the scheme of graphical estimation of *Weibull* distribution parameters. Graphically appointed parameters viability of T - characteristic and the steepness of b distribution allow to construct a theoretical reliability function R(t) for each class of technical condition of the sewage system. These functions are in turn the basis for the development of statistical predictions of technical and operational state, which is one of the possibilities of qualified renovation planning of analyzed linear object such as sewage system.

**Keywords:** sewage systems, stoneware domestic network, optical inspection, real classification of network technical state, prediction of network technical state

#### DOI:10.7862/rb.2014.58

Przesłano do redakcji: lipiec 2014 r. Przyjęto do druku: wrzesień 2014 r.