

Paweł ŚNIADY¹
Filip ZAKĘŚ²

DRGANIA WIELOPRZĘSŁOWYCH CIĄGLYCH BELEK PRYZMATYCZNYCH WYWOŁANE SIŁĄ RUCHOMĄ

Praca przedstawia rozwiązanie zagadnienia drgań wieloprzęsłowych ciągłych belek pryzmatycznych wywołanych skupioną siłą poruszającą się ze stałą prędkością. Wykorzystując znane rozwiązania dla belki swobodnie podpartej obciążonej siłą ruchomą oraz zmienną w czasie siłą skupioną w punkcie wyznaczono równanie drgań belki wieloprzęsłowej analogicznie do statycznej metody sił, zastępując algebraiczny układ równań zgodności przemieszczeń układem równań całkowych Volterry, podając również procedurę numeryczną ułatwiającą ich rozwiązanie. W pracy zamieszczono przykład obliczeniowy belki trójprzęsłowej.

Słowa kluczowe: teoria Własowa, częstości i formy własne, szeregi Czebyszewa, związki rekurencyjne, rozwiązania analityczne

1. Wprowadzenie

Ważnym zagadnieniem w dynamice konstrukcji inżynierskich jest problem drgań wywołanych poruszającym się obciążeniem. Zagadnienie to występuje między innymi w dynamice mostów drogowych i kolejowych, kładek dla pieszych, torów kolejowych, pasów startowych lotnisk, dróg, kolejek linowych a także samolotów i raket. Jest to problematyka ważna, a równocześnie interesująca z teoretycznego punktu widzenia. Poświęcono jej setki prac naukowych [1]. Badano drgania cięgien, belek, płyt, powłok, ram, łuków, a szczególnie mostów, w tym mostów wiszących. Analizowano drgania konstrukcji wywołane różnymi rodzajami obciążeń ruchomych, które można podzielić na obciążenia nieinercyjne i obciążenie inercyjne. Do obciążeń nieinercyjnych należą: ruchoma siła skupiona, ruchome obciążenie rozłożone a także ruchomy moment sku-

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Paweł Śniady, Wydział Inżynierii środowiska i Geodezji, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, tel. 71 320 55 06, e-mail: pawel.sniady@wp.pl

² Filip Zakęś, Wydział Inżynierii Środowiska i Geodezji, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, tel. 71 320 55 06, e-mail: filip.zakes@up.wroc.pl

piony. Do ruchomych obciążeń inercyjnych często modelujących poruszające się pojazdy należą: nieresorowana masa skupiona lub rozłożona, oscylatory o jednym i wielu stopniach swobody. Rozwiązywano problemy zarówno w zakresie deterministycznym jak i w ujęciu drgań stochastycznych. W większości prac badano proste dźwigary jednoprzęsłowe [2], a także ustroje bardziej skomplikowane jak podwójna struna, podwójna belka czy most wiszący, ale również jako dźwigary jednoprzęsłowe.

Ważnym i interesującym zagadnieniem są drgania belek wieloprzęsłowych wywołane obciążeniem ruchomym, gdyż wiele obecnie projektowanych konstrukcji inżynierskich (np. mostów) odpowiada takiemu właśnie schematowi dynamicznemu [3]-[11]. Stosunkowo mało jest prac poświęconych temu zagadnieniu.

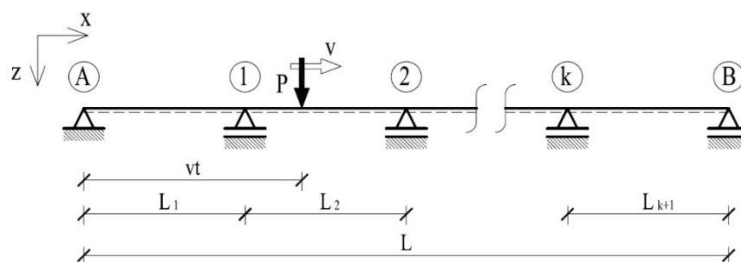
W niniejszej pracy przedstawiono algorytm wyznaczania drgań wieloprzęsłowej przyrzmatycznej belki Eulera-Bernoulliego poddanej działaniu ruchomej siły skupionej o stałej wartości. Przy rozwiązywaniu zagadnienia połączono procedury analityczne i numeryczne. Założono, że sztywność oraz masa jednostkowa przekroju belki są jednakowe w każdym przęśle, natomiast zmienna może być rozpiętość poszczególnych przęseł. Problem rozwiązano w sposób analogiczny do statycznej metody sił, gdzie układ równań algebraicznych zastąpiono układem równań całkowych Voltery pierwszego (gdy podpory są stałe) lub drugiego rodzaju (gdy podpory są sprężyste). Za układ podstawowy metody sił (belkę podstawową) przyjęto jednoprzęsłową belkę swobodnie podpartą. Aby otrzymać rozwiązanie dla belki wieloprzęsłowej, konieczne jest wyznaczenie drgań belki swobodnie podpartej o skończonej długości poddanej działaniu siły ruchomej oraz wywołanych siłami skupionymi w miejscach usuniętych podpór nadliczbowych.

2. Drgania belki swobodnie podpartej wywołane siłą ruchomą

Rozpatrujemy drgania wieloprzęsłowej belki Eulera-Bernoulliego obciążonej siłą P poruszającą się ze stałą prędkością v . Belka spoczywa na $k+2$ ($k=1,2,3,\dots$) podporach (rys. 1), co oznacza, że jest k -krotnie statycznie niewyznaczalna. Belka charakteryzuje się stałą geometrią przekroju poprzecznego w każdym przęśle oraz dowolną lokalizacją podpór pośrednich. W prezentowanej metodzie za układ podstawowy metody sił przyjęto belkę swobodnie podpartą Eulera-Bernoulliego o skończonej rozpiętości L , obciążoną ruchomą siłą o stałej wartości P , poruszającej się ze stałą prędkością v (rys. 2). Drgania tłumione takiej belki opisuje równanie:

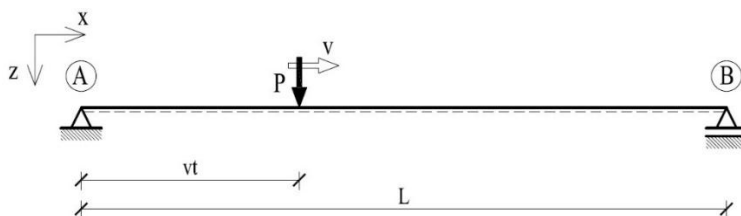
$$EI \frac{\partial^4 w^P(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w^P(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w^P(x,t)}{\partial t^2} = P \delta(x - vt) \quad (1)$$

gdzie EI oznacza sztywność giętą belki, m oznacza masę jednostkową przekroju belki, natomiast c jest współczynnikiem tłumienia. Symbolem $\delta(\cdot)$ oznaczono deltę Diraca.



Rys. 1. Belka wieloprzęsłowa obciążona ruchomą siłą skupioną

Fig. 1. Multi-span continuous beam loaded with moving force



Rys. 2. Belka swobodnie podparta obciążona ruchomą siłą skupioną

Fig. 2. Simply supported beam loaded with moving force

Dla belki swobodnie podpartej warunki brzegowe mają postać:

$$w^P(0, t) = w^P(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w^P(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w^P(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2)$$

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{vt}{L}, \quad \xi \in [0, 1], \quad T \in [0, 1] \quad (3)$$

równanie (1) przyjmuje postać:

$$w^P(\xi, T)^{IV} + c_0 w^P(\xi, T) + \sigma^2 w^P(\xi, T) = P_0 \delta(\xi - T) \quad (4)$$

gdzie: $c_0 = c \frac{vL^3}{EI}$, $\sigma^2 = \frac{mv^2L^2}{EI} = \mu^2 \lambda^2$, $P_0 = \frac{PL^3}{EI}$, $\mu = \frac{v}{v_g}$, $\lambda = \frac{L}{r}$, $r = \frac{\bar{I}}{A}$, $v_g = \frac{\bar{E}}{\rho}$. Cyframi rzymskimi oznaczono różniczkowanie po przestrzennej współrzędnej ξ , natomiast kropką oznaczono różniczkowanie po czasie T . Wielkość v_g oznacza prędkość rozchodzenia się fali giętej (fali podłużnej w pręcie), a przez symbol λ oznaczono smukłość belki. Symbole A , I , r oznaczają kolejno pole przekroju belki, jego moment bezwładności oraz promień bezwładności, E oznacza moduł Younga zaś $\rho = \frac{m}{A}$ oznacza gęstość materiału.

Warunki brzegowe (2) przyjmują postać:

$$w^P 0, T = w^P 1, T = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w^P(\xi, T)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 w^P(\xi, T)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (5)$$

Przyjęto, że w chwili początkowej belka jest w spoczynku stąd warunki początkowe mają postać:

$$w^P \xi, 0 = 0, \dot{w}^P \xi, 0 = 0 \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (4) przy warunkach brzegowych (5) przyjmuje się w postaci szeregu:

$$w \xi, T = \sum_{n=1}^{\infty} y_n T \sin n\pi \xi \quad (7)$$

Po podstawieniu wyrażenia (7) do równania (4) oraz wykorzystaniu ortogonalności funkcji własnych otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$y_n T + 2\alpha y_n T + \frac{n\pi^4}{\sigma^2} y_n T = \frac{2P_0}{\sigma^2} \sin n\pi T \quad (8)$$

gdzie $2\alpha = \frac{cL}{mv}$. Warunki początkowe mają postać:

$$y_n 0 = 0, \dot{y}_n 0 = 0 \quad (9)$$

Po rozwiązaniu równania (8) z uwzględnieniem warunków początkowych (9) dynamiczna odpowiedź belki ma postać:

$$w^P \xi, T = w_A^P \xi, T + w_S^P \xi, T, \quad (10)$$

gdzie:

$$w_A^P(\xi, T) = 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi^2 - \sigma^2 \operatorname{sinn}\pi T \operatorname{sinn}\pi\xi}{n\pi^2 (n\pi^2 - \sigma^2)^2 + 4\alpha^2\sigma^4} - 4P_0\alpha\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi T \operatorname{sinn}\pi\xi}{n\pi \{n\pi^2 - \sigma^2\}^2 + 4\alpha^2\sigma^4} \quad (11)$$

$$w_S^P(\xi, T) = 4P_0\alpha^2\sigma^2 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\Omega_n T \operatorname{sinn}\pi\xi}{\Omega_n n\pi \{n\pi^2 - \sigma^2\}^2 + 4\alpha^2\sigma^4} - 2P_0 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi) (n\pi^2 - \sigma^2) \sin\Omega_n T \operatorname{sinn}\pi\xi}{\Omega_n \{n\pi^2 - \sigma^2\}^2 + 4\alpha^2\sigma^4} + 4P_0\alpha\sigma^2 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\Omega_n T \operatorname{sinn}\pi\xi}{n\pi \{n\pi^2 - \sigma^2\}^2 + 4\alpha^2\sigma^4}, \quad (12)$$

gdzie $\Omega_n^2 = \frac{(n\pi)^4}{\sigma^2} - \alpha^2$. W przypadku drgań nietłumionych ($c=0$) dynamiczna odpowiedź układu ma postać:

$$w^P(\xi, T) = w_A^P(\xi, T) + w_S^P(\xi, T) = 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinn}\pi T \operatorname{sinn}\pi\xi}{n\pi^2 (n\pi^2 - \sigma^2)} - 2P_0\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{(n\pi)^2}{\sigma} T \operatorname{sinn}\pi\xi}{n\pi^3 (n\pi^2 - \sigma^2)}. \quad (13)$$

Jeżeli spełniona jest równość $\sigma = vL \frac{m}{EI} = \mu\lambda = \pi$ szeregi w rozwiązaniu (13) zbiegają do nieskończoności. Stąd prędkość rezonansowa v_{cr} jest równa:

$$v_{cr} = \frac{\pi}{L} \frac{EI}{m} = \frac{\pi}{\lambda} v_g. \quad (14)$$

Dla większości belek $\lambda \gg \pi$, stąd dla tych przypadków $v_{cr} < v_g$.

Funkcja $w_A^P(\xi, T)$ podana w wyrażeniach (11) i (13) opisuje drgania i aperiodyczne i spełnia niejednorodne równanie różniczkowe (4), nie spełnia jednak warunków początkowych ruchu (6). Funkcja $w_S^P(\xi, T)$ opisuje drgania swobodne belki i jest rozwiązaniem jednorodnego równania różniczkowego (4) przy $P_0 = 0$ i wraz z funkcją opisującą drgania aperiodyczne spełnia warunki początkowe (6).

3. Drgania belki wywołane siłą skupioną

W kolejnym etapie rozważmy drgania belki wywołane siłą $X(T)$ skupioną w punkcie ξ_i . Posługując się zmiennymi bezwymiarowymi (3) i postępując ana-

logicznie jak w przypadku siły ruchomej uzyskuje się rozwiązanie w postaci splotu

$$w^X(\xi, T) = \frac{L}{v} \int_0^T h_i(\xi, T - \tau) X(\tau) d\tau, \quad (15)$$

gdzie impulsowa funkcja przejścia $h_i(\xi, T)$ jest równa

$$h_i(\xi, T) = \frac{2vL^2}{\sigma^2 EI} e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_n T \sin n\pi \xi_i \sin n\pi \xi}{\Omega_n}, \quad (16)$$

a w przypadku drgań nietłumionych ($\alpha = 0$) odpowiednio

$$\begin{aligned} h_i(\xi, T) &= \frac{2vL^2}{\sigma EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{\sigma} T \sin n\pi \xi_i \sin n\pi \xi}{n\pi^2} = \\ &= \frac{2vL^2}{\sigma^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n T \sin n\pi \xi_i \sin n\pi \xi}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Impulsowa funkcja przejścia $h_i(\xi, T)$ została uzyskana z równania

$$h_i^{IV}(\xi, T) + c_0 h_i(\xi, T) + \sigma^2 h_i(\xi, T) = \frac{vL^2}{EI} \delta(T - \xi - \xi_i). \quad (18)$$

Przedstawione powyżej rozwiązania dla belki swobodnie podpartej obciążonej siłą ruchomą i siłą skupioną w punkcie zostaną wykorzystane do rozwiązania zagadnienia drgań belki wieloprzęsłowej.

4. Drgania belki wieloprzęsłowej – równania całkowe Volterry

Jako podstawowy schemat dynamiczny przyjęto statycznie wyznaczalną belkę swobodnie podpartą obciążoną siłą ruchomą i k siłami nadliczbowymi $X_i(T)$ ($i=1, \dots, k$) przyłożonymi w miejscach podpór pośrednich (rys.3). Ugięcia statycznie wyznaczalnej belki w miejscu podpór pośrednich w belce statycznie niewyznaczalnej wywołane wyżej wymienionymi siłami są równe 0. Na tej podstawie uzyskano układ k równań całkowych Volterry pierwszego rodzaju

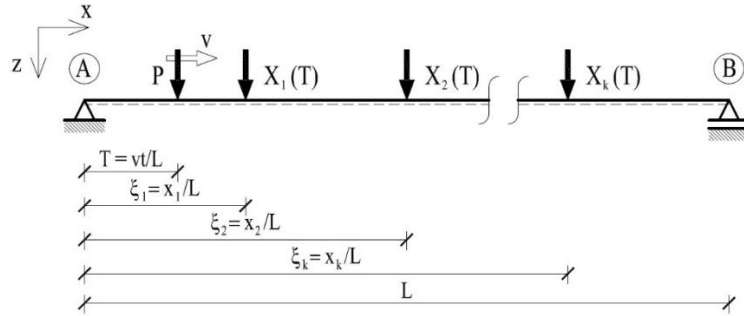
$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T \delta_{ij}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + \Delta_{iP}(T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (19)$$

gdzie $\delta_{ij}(T)$ i $\Delta_{iP}(T)$ oznaczają odpowiednio przemieszczenie pionowe belki swobodnie podpartej w punkcie ξ_i spowodowane siłą skupioną X_j oraz siłą ruchomą. Funkcje te są równe

$$\delta_{ij}(T) = h_j(\xi_i, T), \quad (20)$$

$$\Delta_{iP}(T) = w_A^P(\xi_i, T) + w_S^P(\xi_i, T), \quad (21)$$

gdzie impulsowa funkcja przejścia $\delta_{ij} T = h_j \xi_i, T$ jest podana w równaniach (16) lub (17), a funkcja $\Delta_{iP} T = w_A^P \xi_i, T + w_S^P \xi_i, T$ jest określona równaniami (10) - (12) lub (13). Współrzędne ξ_i ($i=1, \dots, k$) określają położenie podpór pośrednich belki wieloprzęsłowej.



Rys. 3. Schemat podstawowy

Fig. 3. Primary structure

Dla porównania rozwiązanie statyczne ma postać

$$\delta_{ij} = \frac{2L^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi_i \sin n\pi\xi_j}{(n\pi)^4}, \quad \Delta_{iP} T = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi T \sin n\pi\xi_i}{(n\pi)^4}, \quad (22)$$

a układ równań całkowych (15) jest zastąpiony układem równań algebraicznych

$$\sum_{j=1}^k \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} T = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (23)$$

Po rozwiązaniu równań całkowych Voltery dynamiczna odpowiedź belki wieloprzęsłowej obciążonej siłą ruchomą jest uzyskana jako rozwiązanie dla belki swobodnie podpartej i ma postać

$$w_d \xi, T = w_A^P \xi, T + w_S^P \xi, T + \frac{L}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T \delta_{ij} T - \tau X_j \tau d\tau. \quad (24)$$

Ugięcie statyczne belki wieloprzęsłowej wywołane siłą skupioną w punkcie T wynosi

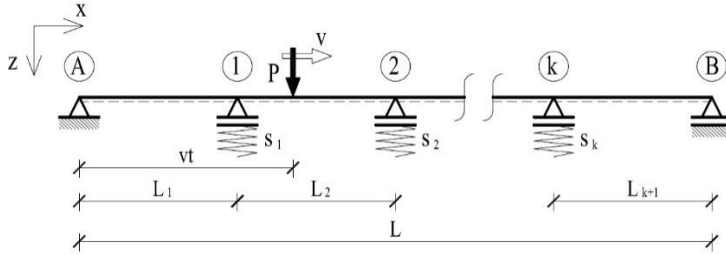
$$w_{st} \xi, T = \frac{2L^3}{EI} P \sin n\pi T + \sum_{i=1}^k X_i \sin n\pi\xi_i \frac{\sin n\pi\xi}{(n\pi)^4} \quad (25)$$

Współczynnik dynamiczny może być zdefiniowany jako stosunek ugięcia dynamicznego do ugięcia statycznego

$$\vartheta \xi, T = \frac{w_d \xi, T}{w_{st} \xi, T} \quad (26)$$

Załóżmy, że podpory pośrednie belki wieloprzęsłowej są podporami sprężystymi o sztywności s_i (rys.4). W tym przypadku zamiast układu równań (19) mamy układ k równań całkowych Voltery drugiego rodzaju

$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T \delta_{ij} T - \tau X_j \tau d\tau + \Delta_{iP} T = -\frac{X_j}{s_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (27)$$



Rys. 4. Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych

Fig. 4. Multi-span continuous beam with elastic supports

4.1. Procedura numeryczna

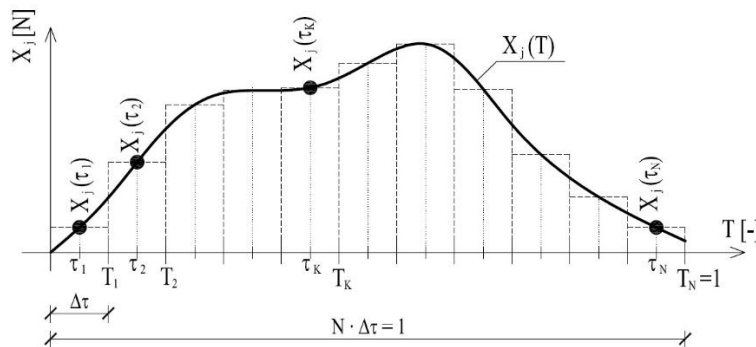
Układ równań całkowych Voltery (15) jest trudny do rozwiązania w sposób analityczny, dlatego też zostanie rozwiązany w sposób numeryczny zgodnie z rys. 5. Tym sposobem w miejsce układu równań całkowych uzyskujemy układ rekurencyjnych równań algebraicznych

$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^K \delta_{ij} T_K - \tau_r X_j \tau_r \Delta\tau + \Delta_{iP} T_K = 0, \quad (28)$$

gdzie $T_K = K\Delta\tau$, $\tau_r = r - 0,5 \Delta\tau$, $r = 1, 2, \dots, K$, $K = 1, 2, \dots, N$ oraz $\Delta\tau = \frac{1}{N}$.

Dla belki dwuprzęsłowej równanie (28) ma postać

$$\frac{L}{v} \sum_{r=1}^K h_i \xi_i T_K - \tau_r X_j \tau_r \Delta\tau + \Delta_{iP} T_K = 0. \quad (29)$$

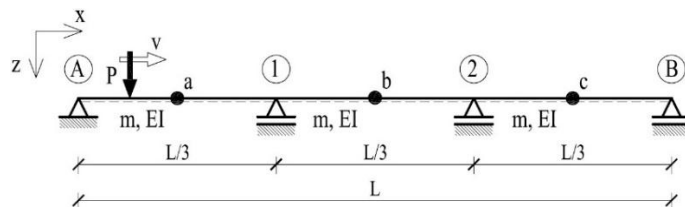


Rys. 5. Schemat obliczeń numerycznych

Fig. 5. Numerical calculations scheme

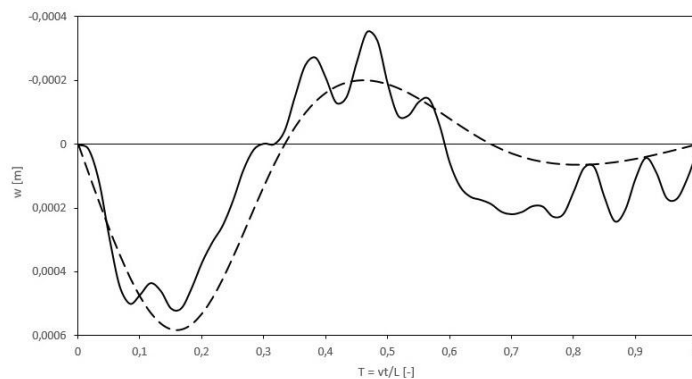
5. Przykład numeryczny

Jako przykład obliczeniowy posłuży belka trójprzęsłowa o rozpiętości między skrajnymi podporami $L = 60$ m, z dwiema podporami pośrednimi dzielącymi belkę na trzy równe przęsła (rys.6). Do obliczeń przyjęto masę jednostkową przekroju belki $m = 1000$ kg/m oraz sztywność giętą $EI = 1,96$ GNm². Ustrój obciążony jest stałą siłą skupioną $P = 9,8$ kN poruszającą się ze stałą prędkością $v = 37$ m/s. W obliczeniach analizowano drgania punktów „a”, „b” i „c” znajdujących się odpowiednio w środku lewego, środkowego i prawego przęsła w zależności od położenia siły poruszającej się wzdłuż belki (rys. 6). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7 do 9. Linia przerywaną zaznaczony przypadek statyczny ($v = 0$).



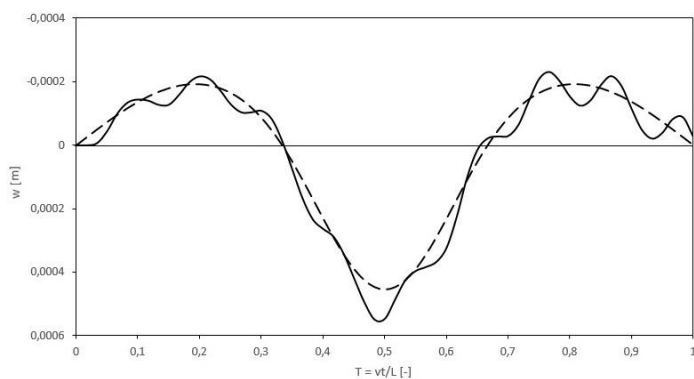
Rys. 6. Trójprzęsłowa belka pryzmatyczna obciążona siłą ruchomą

Fig. 6. Three-span continuous uniform beam loaded with moving force



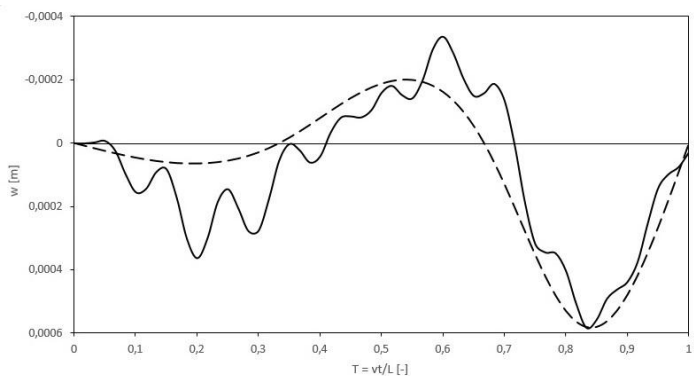
Rys. 7. Ugięcie dynamiczne punktu „a” (środek pierwszego przęsła)

Fig. 7. Dynamic deflection of point “a” (middle of the first span)



Rys. 8. Ugięcie dynamiczne punktu „b” (środek drugiego przęsła)

Fig. 8. Dynamic deflection of point “b” (middle of the first span)



Rys. 9. Ugięcie dynamiczne punktu „c” (środek trzeciego przęsła)

Fig. 9. Dynamic deflection of point “c” (middle of the third span)

6. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy metoda wyznaczania drgań giętnych ciągłych belek wieloprzęsłowych polegająca na wykorzystaniu równań całkowych Volterry może być z powodzeniem zastosowana przy rozpatrywaniu belek pryzmatycznych o stałym przekroju i stałym rozkładzie masy we wszystkich przęsłach układu. Podano wzory zarówno dla drgań nietłumionych jak i drgań z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego. Po odpowiednich przekształceniach opisaną metodę można wykorzystać również w przypadku innych nieinercyjnych obciążeń ruchomych, takich jak ruchome obciążenie rozłożone, ruchomy moment skupiony lub ruchoma seria sił skupionych. Zastosowana procedura numeryczna prowadzi do zastąpienia równań całkowych równaniami algebraicznymi, co umożliwi przeprowadzenie dokładnych obliczeń przy zastosowaniu prostych arkuszy kalkulacyjnych.

Literatura

- [1] Fryba L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, 1999, Telford, London.
- [2] Kączkowski Z., *Vibration of a beam under a moving load*. *Proceedings of Vibration Problems* 1963; 4 (4): 357-373.
- [3] Reipert Z., *Vibration of frames under moving load*. *Archiwum Inżynierii Lądowej* 1970; 16 (3): 419-447.
- [4] Johansson C., Pacoste C., Karoumi R., *Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads*, *Computers and Structures* 2013; 119: 85-94.
- [5] Salvo V.D., Muscolino G., Palmeri A., *A substructure approach tailored to the dynamic analysis of multi-span continuous beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 2010; 329: 3101-3120.
- [6] Martinez-Castro A. E., Museros P., Castello-Linares A., *Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads*. *Journal of Sound and Vibration* 2006; 294: 278–97.
- [7] Dugush Y.A., Eisenberger M., *Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 2002; 245: 911-926.
- [8] Henchi K., Fafard M., Dhatt G., Talbot M., *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 1997; 199: 33–50.
- [9] Henchi K., Fafard M., Dhatt G., Talbot M., *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads*, 1997; 199: 33-50.
- [10] Lee H.P., *Dynamic response of a beam with intermediate point constraints subject to a moving load*, *Journal of Sound and Vibration* 1994; 171: 361–8.
- [11] Hayashikawa T., Watanabe N., *Dynamic behavior of continuous beams with moving load*, *Journal of Engineering Mechanics Division* 1981; 107: 229–46.

VIBRATIONS OF MULTI-SPAN CONTINUOUS BEAMS UNDER MOVING FORCE

Summary

In this paper authors consider damped and undamped vibrations of multi-span continuous beams, uniform in every span, subjected to a moving constant force. Presented solution is analogous to the static force method, with simply supported beam applied as a primary structure. Instead of set of algebraic force method equations a set of Volterra integral equations is given. A numerical example of three-span beam is presented.

Keywords: multi-span beam, moving force, Volterra integral equation

DOI:10.7862/rb.2014.40

Przesłano do redakcji: 28.04.2014 r.

Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.