

Józef SZYBIŃSKI¹
Piotr RUTA²

ANALIZA DRGAŃ SWOBODNYCH NIEPRYZMATYCZNEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy jest zagadnienie własne niepryzmatycznego pręta cienkościennego opisanego według teorii Własowa. Przestrzenne drgania pręta opisane są czterema, w ogólnym przypadku sprzężonymi, równaniami o zmiennych współczynnikach. Równania te zostały rozwiązane z wykorzystaniem szeregów Czebyszewa. Zastosowana metoda bazuje na twierdzeniu dotyczącym rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, przedstawionym w monografii Paszkowskiego, *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa, 1975. Uzyskane w wyniku zastosowania opisanego twierdzenia związki rekurencyjne pozwalają na wyznaczenie współczynników rozwinięć, w szeregi Czebyszewa, poszukiwanych funkcji przemieszczeń i obrotu. W przypadku drgań swobodnych związki te mają postać nieskończonego układu równań algebraicznych. Przedstawione rozważania dotyczą układu o dowolnie zmiennych parametrach geometrycznych i materiałowych. Uzyskane końcowe wzory pozwalają na rozwiązanie zagadnienia własnego dowolnego pręta. Wystarczy tylko w nieskończonym układzie równań podstawić współczynniki rozwinięć parametrów aktualnie analizowanego układu. W celu weryfikacji uzyskanych wyników porównano otrzymane częstości i formy własne z wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem MES. Do analizy MES wykorzystano program komputerowy Sofistik. Układ podzielono na 100 pryzmatycznych belkowych elementów skończonych o siedmiu stopniach swobody. Otrzymane rezultaty w zakresie częstości własnych dały dobrą zgodność wyników otrzymanych z wykorzystaniem przedstawionej w pracy metody, a wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Gorską zgodność otrzymano w zakresie form własnych, niewątpliwym wpływem na to miał istotnie różny sposób modelowania analizowanych układów.

Słowa kluczowe: teoria Własowa, częstości i formy własne, szeregi Czebyszewa, związki rekurencyjne, rozwiązania analityczne

¹ Józef Szybiński, Politechnika Wrocławska, Instytut Inżynierii Lądowej, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: jozef.szybinski@pwr.edu.pl

² Autor do korespondencji/corresponding author: Piotr Ruta, Politechnika Wrocławska Instytut Inżynierii Lądowej, 50-370 Wrocław Wyb. Wyspiańskiego 27, e-mail: piotr.ruta@pwr.edu.pl

1. Wprowadzenie

Konieczność racjonalnego kształtowania i ekonomicznego projektowania konstrukcji, jak również względy architektoniczne są powodem stosowania we współczesnych konstrukcjach inżynierskich cienkościennych układów prętowych o zmiennych parametrach geometrycznych i materiałowych. Problem analizy tych układów jest również ciekawy ze względów teoretycznych, gdyż równania opisujące te układy są równaniami o zmiennych współczynnikach i jako takie poza szczególnymi przypadkami nie mają zamkniętych rozwiązań analitycznych.

Zagadnieniem drgań cienkościennych ustrojów prętowych zajmowało się wielu autorów. Ze względu na ograniczoną objętość pracy zostaną przedstawione tylko wybrane pozycje literatury dotyczące układów niepryzmatycznych. Zagadnieniem drgań swobodnych układów niepryzmatycznych zajmowali się m.in. Soltani i in. [1], [2], Ambrosini i in. [3], Sung-Bo Kim, Moon-Young Kim [4] oraz Liviu Librescu, Sungsoo Na [5]. W pracy [1] autorzy rozwiązyli zagadnienia stateczności, a w [2] stateczności i drgań swobodnych belek cienkościennych o zmiennych przedziałami, liniowo, wysokościach. Do rozwiązania wykorzystali klasyczne szeregi potęgowe. W pracy [3] rozwiązano zagadnienie drgań wymuszonych aperiodycznie, niepryzmatycznej, cienkościennej o liniowo zmiennej wysokości belki wspornikowej. Autorzy pracy [4] sformułowali cienkościenny element skończony, który następnie wykorzystali do rozwiązania problemu stateczności oraz zagadnienia drgań swobodnych.

W niniejszej pracy do rozwiązania zagadnienia własnego zastosowano metodę wykorzystującą przedstawione przez Paszkowskiego [6] twierdzenie opisujące metodę rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach z wykorzystaniem szeregów Czebyszewa. Metoda ta sprowadza się do wyprowadzenia związków rekurencyjnych w postaci nieskończonego układu równań algebraicznych, którego rozwiązaniem są współczynniki rozwinięcia w szeregi, poszukiwanych funkcji. Metoda ta została również przedstawiona w pracach autora [7], [8]. Ze względu na ogólny charakter stosowanej metody, wyprowadzenie wzorów rekurencyjnych dla konkretnego problemu (konkretnego układu równań) pozwala na rozwiązania analizowanego zagadnienia dla różnych parametrów geometrycznych i materiałowych.

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem analizy są drgania swobodne niepryzmatycznej, cienkościennej belki opisanej według teorii Własowa, o długości $2a$. Punktem wyjścia do rozważań są ogólne sprzężone równania różniczkowe pręta cienkościennego o osi prostoliniowej (zapisane dla układu osi głównych), w którym środek ścinania nie musi pokrywać się ze środkiem przekroju [9]. Równania opisujące przestrzenne drgania takiego pręta mają postać

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{EA}(X) \frac{\partial U_X}{\partial X} \right) + \overline{\rho A}(X) \frac{\partial^2 U_X}{\partial t^2} = 0, \\
 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\overline{EI}_Z(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \right) + \\
 \left(\overline{\rho A} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_Z \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0, \\
 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\overline{EI}_Y(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \right) + \\
 \left(\overline{\rho A} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_Y \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0, \\
 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{GI}_s \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + \\
 \left(\overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} + \overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0,
 \end{array} \right. \quad (1)$$

gdzie ρ - gęstość pręta, A - pole przekroju poprzecznego, I_Z, I_Y, I_0 - momenty bezwładności odpowiednio względem osi Z, Y oraz środka O , I_s - moment bezwładności na skręcanie, $I_{Z\omega}, I_{Y\omega}$ - wycinkowe momenty odśrodkowe (dewiacyjne) względem osi Z i Y , I_ω - wycinkowy moment bezwładności. Wykorzystywana przy obliczaniu tych charakterystyk współrzędna wycinkowa jest współrzędna znormalizowaną spełniającą warunek $\int \omega \delta ds = 0$ (δ - grubość ścianki profilu).

Natomiast przy definiowaniu warunków brzegowych w punktach $X = \pm a$, wykorzystywane są następujące zależności

$$U_X(X,t) = 0 \quad \text{lub} \quad N = \overline{EA}(X) \frac{\partial U_X}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

$$U_Y(X,t) = 0 \quad \text{lub}$$

$$\begin{aligned}
 Q_Y = \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_Z \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} \right) + \\
 + \left(\overline{\rho I}_Z(X) \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$U_Z(X, t) = 0 \text{ lub}$$

$$\begin{aligned} Q_Z &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_Y \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) + \\ &\left(\overline{\rho I}_Y(X) \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Theta(X, t) = 0 \text{ lub}$$

$$\begin{aligned} M_X &= \frac{\partial}{\partial X} \left(-\overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) + \overline{GI}_s \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ &\left(\overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_Y(X, t)}{\partial X} = 0 \text{ lub } M_Z = \overline{EI}_Z(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_Z(X, t)}{\partial X} = 0 \text{ lub } M_Y = -\overline{EI}_Y(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(X, t)}{\partial X} = 0 \text{ lub } M_\omega = \overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} = 0. \quad (8)$$

Obliczając występujące we wzorze (1) pochodne iloczynów funkcji oraz wprowadzając zmienne i funkcje bezwymiarowe $x = X/a$, $u_x = U_X/a$, $u_y = U_Y/a$, $u_z = U_Z/a$, wyjściowy układ równań (1) w przypadku drgań swobodnych można przedstawić w następującej postaci macierzowej

$$\sum_{m=0}^4 \left(\mathbf{K}_m(x) - \omega^2 \mathbf{R}_m(x) \right) \mathbf{f}^{(4-m)}(x) = \mathbf{P}(x) \quad (9)$$

Po wprowadzeniu macierzy pomocniczych

$$\mathbf{K}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & -EI_{z\omega} \\ 0 & 0 & EI_y & -EI_{y\omega} \\ 0 & -EI_{z\omega} & -EI_{y\omega} & EI_\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(x) = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho I_z & 0 & \rho I_{z\omega} \\ 0 & 0 & -\rho I_y & \rho I_{y\omega} \\ 0 & \rho I_{z\omega} & \rho I_{y\omega} & -\rho I_\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1(x) = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

macierzowe funkcje $\mathbf{P}_m(x)$, $\mathbf{R}_m(x)$ oraz wektory $\mathbf{P}(x)$ i $\mathbf{f}(x,t)$ występujące w (9) można opisać następującymi wzorami (we wzorach przyjęto zapis $\mathbf{f}^{(p)}(x,t) = \partial^p \mathbf{f}(x,t) / \partial x^p$):

$$\mathbf{P}_0(x) = \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{P}_1(x) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{P}_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{K}_0(x) - \mathbf{K}_1(x), \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_3(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_1(x), \quad \mathbf{P}_4(x) = \mathbf{O}(x),$$

$$\mathbf{R}_0(x) = \mathbf{R}_1(x) = \mathbf{O}(x), \quad \mathbf{R}_2(x) = \mathbf{G}_0(x),$$

$$\mathbf{R}_3(x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}_0(x), \quad \mathbf{R}_4(x) = \mathbf{G}_1(x), \quad (12)$$

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Występujące w macierzach (10) parametry to bezwymiarowe odpowiedniki parametrów występujących w wyjściowym wzorze (1). Przykładowo: $\overline{EA} = EA_0 EA$, $\overline{EI}_y = a^2 EA_0 EI_y$, $\overline{EI}_{y\omega} = a^3 EA_0 EI_{y\omega}$, $\overline{EI}_\omega = a^4 EA_0 EI_\omega$, $\overline{\rho A} = EA_0 EA / a^2$, $\overline{\rho I}_y = EA_0 \rho I_y$, $\overline{\rho I}_{y\omega} = a EA_0 \rho I_{y\omega}$, $\overline{\rho I}_\omega = a^2 EA_0 \rho I_\omega$.

3. Rozwiązanie

Do rozwiązania układu (9) zastosujemy przedstawione w monografii [6] twierdzenie (patrz [6] str. 231 i 323) przedstawiające metodę rozwiązywania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. W szczególnym przypadku, gdy układ równań różniczkowych jest czwartego rzędu z cytowanego twierdzenia wynika, że współczynniki rozwinięcia poszukiwanego wektora $\mathbf{f}(s)$ spełniają następujący nieskończony układ równań

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) k (a_{k-l}[\mathbf{Q}_0] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_0]) + \right. \\
& 4(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) (a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_1]) + \\
& 2(k^2-9)(k^2-4) (k+1) (a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_2]) - 2k (a_{k-l}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_2]) + \\
& \quad (k-1) (a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_2]) \left. \right\} + \\
& (k^2-9) ((k+1)(k+2) (a_{k-l-3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-3}[\mathbf{Q}_3]) - \\
& \quad 3(k-1)(k+2) (a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_3]) + \\
& \quad 3(k+1)(k-2) (a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_3]) - \\
& \quad (k-1)(k-2) (a_{k-l+3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+3}[\mathbf{Q}_3])) + \\
& \frac{1}{2} ((k+1)(k+2)(k+3) (a_{k-l-4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-4}[\mathbf{Q}_4]) - \\
& \quad 4(k+3)(k^2-4) (a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_4]) + \\
& \quad 6k(k^2-9) (a_{k-l}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_4]) - 4(k-3)(k^2-4) (a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_4]) + \\
& \quad (k-1)(k-2)(k-3) (a_{k-l+4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+4}[\mathbf{Q}_4])) \left. \right\} a_l[\mathbf{f}] = 0 \quad k=0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

gdzie funkcje macierzowe \mathbf{Q}_m określone są wzorami

$$\mathbf{Q}_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{4-j}{m-j} (\mathbf{P}_j - \omega^2 \mathbf{R}_j)^{(m-j)}, \quad m=0, 1, \dots, 4 \tag{15}$$

$a_l[\mathbf{f}] = [u_{xl}, u_{yl}, u_{zl}, \theta_l]^T$, a $u_{xl}, u_{yl}, u_{zl}, \theta_l$ są współczynnikami rozwinięć funkcji przemieszczeń i obrotu w szeregi Czebyszewa

$$\begin{aligned}
u_x(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{xl} T_l(x), & u_y(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{yl} T_l(x), \\
u_z(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{zl} T_l(x), & \theta(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \theta_l T_l(x),
\end{aligned} \tag{16}$$

gdzie $\sum_{l=0}^{\infty} a_l[f] = \frac{1}{2} a_0[f] + a_1[f] + a_2[f] + \dots$, a $T_l(x)$ jest l -tym wielomianem

Czebyszewa I rodzaju. Wykonując obliczenia z wykorzystaniem wzoru (15) określającego macierzowe funkcje $\mathbf{Q}_m(x)$ otrzymano

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_0(x) &= \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{Q}_1(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_0(x), \\
 \mathbf{Q}_2(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{K}_0(x) - \mathbf{K}_1(x) - \omega^2 \mathbf{G}_0(x), \\
 \mathbf{Q}_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_1(x) + \omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}_0(x), \quad \mathbf{Q}_4(x) = -\omega^2 \mathbf{G}_1(x),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Po podstawieniu współczynników rozwinięć w szeregi Czebyszewa funkcji \mathbf{Q}_m , do równania (14) otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}(k,l) & 0 & k_{24}(k,l) \\ 0 & 0 & k_{33}(k,l) & k_{34}(k,l) \\ 0 & k_{42}(k,l) & k_{43}(k,l) & k_{44}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xl} \\ u_{yl} \\ u_{zl} \\ \theta_l \end{bmatrix} + \\
 + \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11}(k,l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(k,l) & 0 & m_{24}(k,l) \\ 0 & 0 & m_{33}(k,l) & m_{34}(k,l) \\ 0 & m_{42}(k,l) & m_{43}(k,l) & m_{44}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xl} \\ u_{yl} \\ u_{zl} \\ \theta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Współczynniki $k_{ij}(k,l)$ i $m_{ij}(k,l)$ poddano dalszym przekształceniom wykorzystując następującą zależność między współczynnikami rozwinięcia pochodnej funkcji a współczynnikami funkcji wyjściowej

$$a_l = \frac{1}{2l} (a_{l-1}^{(1)} - a_{l+1}^{(1)}), \quad l \neq 0, \tag{19}$$

gdzie $a_l = a_l[f]$, a $a_l^{(p)} = a_l[\partial^p f / \partial x^p]$. Ze względu na ograniczoną objętość pracy przedstawiono tylko te istotnie różniące się:

$$\begin{aligned}
 k_{11}(k,l) &= -2(k^2 - 9)l [(k+1)(k+2)(EA_{k-l-2} - EA_{k+l-2}) \\
 &\quad - 2(k^2 - 4)(EA_{k-l} - EA_{k+l}) + (k-1)(k-2)(EA_{k-l+2} - EA_{k+l+2})],
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}(k,l) &= 8(k^2 - 9)(k^2 - 4)l [(k+1)(l-1)EI_{zk-l} - \\
 &\quad 2l \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j) EI_{zk-l+2j} - (k-1)(l-1)EI_{zk+l}].
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(k, l) = & \frac{1}{2}[(k+1)(k+2)(k+3)(\rho A_{k-l-4} + \rho A_{k+l-4}) - \\
& 4(k+3)(k^2-4)(\rho A_{k-l-2} + \rho A_{k+l-2}) + \\
& 6k(k^2-9)(\rho A_{k-l} + \rho A_{k+l}) - 4(k-3)(k^2-4)(\rho A_{k-l+2} + \rho A_{k+l+2}) + \\
& (k-1)(k-2)(k-3)(\rho A_{k-l+4} + \rho A_{k+l+4})] \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{24}(k, l) = m_{42}(k, l) = & -2(k^2-9)l[(k+1)(k+2)(\rho I_{z\omega_{k-l-2}} - \rho I_{z\omega_{k+l-2}}) - \\
& 2(k^2-4)(\rho I_{z\omega_{k-l}} - \rho I_{z\omega_{k+l}}) + \\
& (k-1)(k-2)(\rho I_{z\omega_{k-l+2}} - \rho I_{z\omega_{k+l+2}})] \quad (23)
\end{aligned}$$

Na podstawie podanych współczynników można wyznaczyć pozostałe np. $k_{44}(k, l)$ to suma współczynników określonych przez wzory (20) i (21) w których odpowiednio: za EA_m podstawiono GI_m , a za EI_{z_m} podstawiono EI_{ω_m} .

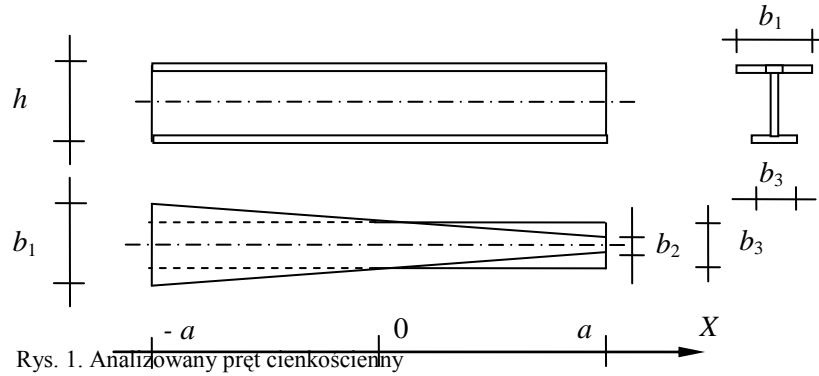
Pierwsze szesnaście równań układu (18) (gdy $k = 0, 1, 2, 3$) jest spełnionych tożsamościowo. Równania te zastępuje się czternastoma równaniami opisującymi warunkami brzegowymi. Przy definiowaniu warunków brzegowych wykorzystuje się następujące wzory pozwalające na obliczenie wartości wielomianów Czebyszewa i ich pochodnych

$$T_n^{(m)}(1) = \begin{cases} 1 & m=0, \\ \frac{n}{(2m-1)!!} \prod_{k=-m+1}^{m-1} (n+k) & m>0, \end{cases} \quad T_n^{(m)}(-1) = (-1)^{n-m} T_n^{(m)}(1). \quad (24)$$

4. Przykłady obliczeniowe

Przedstawioną metodę zastosowano do wyznaczenia częstości i form własnych cienkościennej, niepryzmatycznej belki monosymetrycznej przedstawionej na rys. 1. Występujące tam wymiary przyjmują następujące wartości: $a = 5\text{m}$, $h = 0.5\text{m}$, $b_1 = 0.5\text{m}$, $b_2 = 0.1\text{m}$, $b_3 = 0.3\text{m}$. Grubości wszystkich ścianek blachownicy $t = 0.01\text{m}$. Natomiast parametry materiałowe przyjmują wartości: $E = 210 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$, $G = 80 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$, $\rho = 7850 \text{kg/m}^3$.

Analizowany układ był obustronnie sztywno utwierdzony, a zatem w punktach $x = \mp 1$ spełnione są relacje $u_x = u_y = u_z = \theta = 0$, $\theta' = u'_y = u'_z = 0$. Po rozwiązaniu równań opisujących warunki brzegowe w szeregi Czebyszewa i wykorzystaniu wzorów (24) otrzymano dla warunków $u_x(\mp 1) = 0$, $\theta'(\mp 1) = 0$ następujące równania



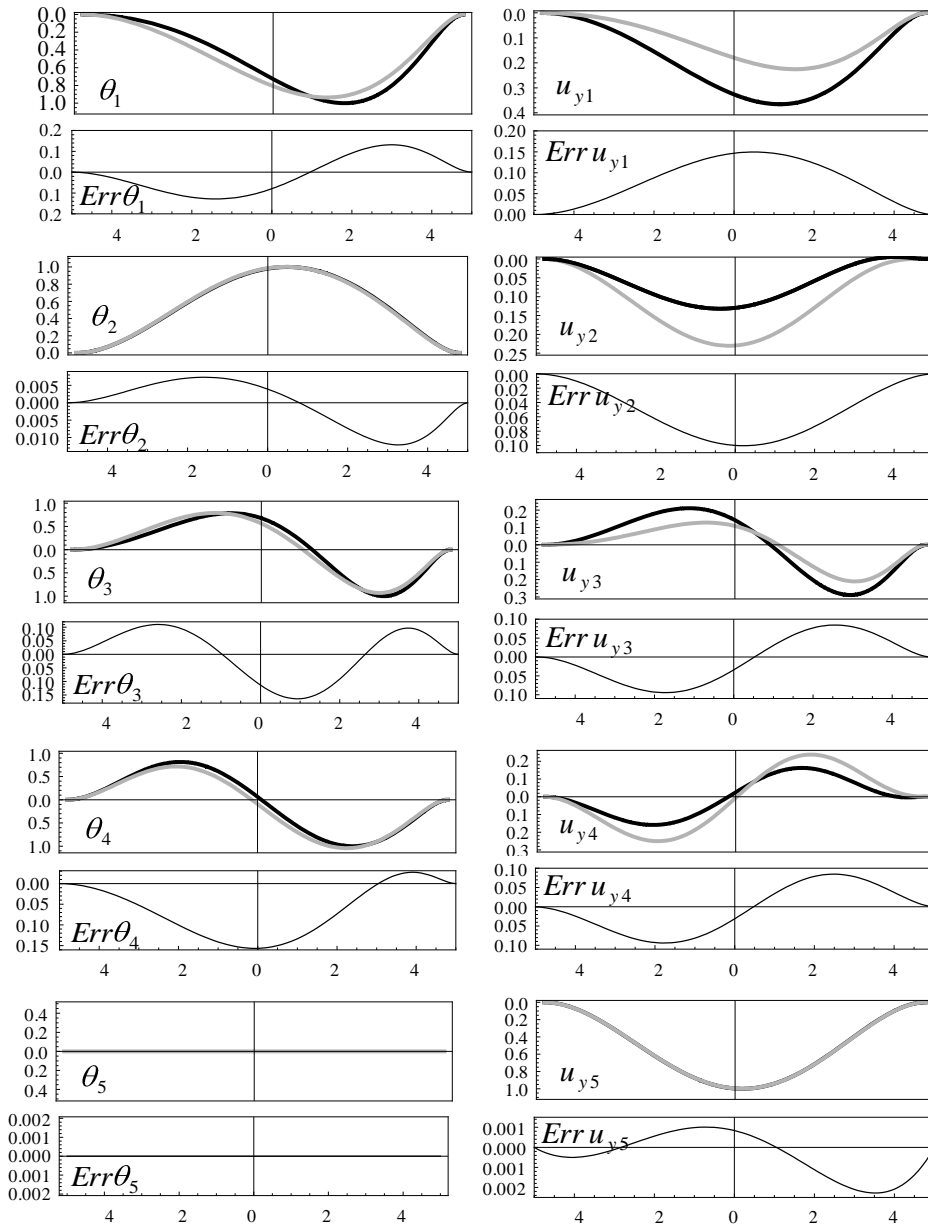
Rys. 1. Analizowany pręt cienkościenny
 Fig. 1. Analysed thin-walled bar

$$u_x(\mp 1) = \sum_{l=0}^{\infty} (\mp 1)^l u_{xl} = 0, \quad \frac{\partial \theta(\mp 1)}{\partial x} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mp 1)^{l+1} l^2 \theta_l = 0. \quad (25)$$

Dla pozostałych, analizowanych warunków brzegowych uzyskane równania są analogiczne.

W celu weryfikacji otrzymanych rezultatów otrzymane wyniki porównano z częstościami i formami własnymi wyznaczonymi z wykorzystaniem MES. Do analizy użyto programu Sofistik, modelując układ 100 pryzmatycznymi elementami skończonymi o siedmiu stopniach swobody (w węzle). Pierwsze dziesięć częstości własnych przedstawiono w Tabeli 1. W zakresie form własnych porównano pierwsze pięć form. Wykresy tych form oraz odchylenie między nimi oznaczone przez $Err f_k(x), k=1,2,\dots,5$ zostało przedstawione na Rys. 2. Ze względu na monosymetryczność przekrojów (brak bisymetrii) formy te zazwyczaj są formami sprzężonymi, giętno-skrętnymi. Z tego też względu na Rys. 2 ich składowe przedstawiono na oddzielnych wykresach. Linia czarna (—) oznaczono formy uzyskane przedstawioną w pracy metodą, linią szarą (—) formy wyznaczone z pomocą MES.

Wykonano również obliczenia dla układu z bisymetrycznym przekrojem. Analizowany układ miał takie same wymiary jak układ z Rys. 1, z tym że pryzmatyczny prostokątny pas dolny zastąpiono pasem o liniowo zmiennej szerokości, identycznym jak pas górny. W tym przypadku wykresy form własnych wyznaczone z pomocą MES i prezentowanej w pracy metody praktycznie pokrywały się.



Rys. 2 Wykresy form własnych oraz różnice między formami wyznaczonymi MES i przedstawioną metodą

Fig. 2 Eigenforms and differences between results obtained using FEM and proposed method

Tabela 1. Częstości własne układu

Table 1. Structure's eigenfrequencies

Częstości własne [Hz]					
Nr	Praca	Sofistik	Nr	Praca	Sofistik
1	11,12	11,11	6	58,00	57,32
2	13,17	12,91	7	68,69	67,64
3	29,92	29,68	8	95,32	93,82
4	35,46	34,89	9	101,28	100,56
5	36,86	36,73	10	112,76	110,63

5. Wnioski

Otrzymane wyniki potwierdzają zgodność otrzymanych częstości własnych z wartościami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Błąd względny dla pierwszych dziesięciu częstości zawarty jest w przedziale 0,09-2,01%. Gorszą zgodność uzyskano w zakresie form własnych. Jak widać z Rys. 2 różnice te mają jednak głównie charakter ilościowy. Jak już wspomniano w przypadku belki o przekroju bisymetrycznych (dla której z powodu ograniczonej objętości pracy nie podano wyników) różnice między formami były praktycznie niezauważalne, a między częstościami własnymi były zawarte w przedziale 0,08-2,54%

Warto podkreślić też, że końcowa postać wyprowadzonych równań (patrz wzory (20)-(23)) pozwala na bezpośrednie rozwiązanie belki o dowolnych parametrach geometrycznych i materiałowych.

Literatura

- [1] Asgarian B., Soltani M., Mohri F: Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, *Thin-Walled Structures*, 62, 2013, s. 96–108.
- [2] Soltani M., Asgarian B., Mohri F.: Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method, *Journal of Constructional Steel Research*, 96, 2014, s. 106–126.
- [3] Ambrosini R. D., Riera J. D., Danesi R.F., A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams, *Engineering Structures*, 22, 2000, s. 890–900.
- [4] Sung-Bo Kim, Moon-Young Kim: Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames, *Engineering Structures*, 22, (2000, s. 446–458.
- [5] Liviu Librescu, Sungsoo Na: Active vibration control of doubly tapered thin walled beams using piezoelectric actuation, *Thin-Walled Structures*, 39, 2001, s. 65–82.
- [6] Paszkowski S.: *Zastosowania numeryczne wielomianów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.

- [7] Ruta P.: Application of Chebyshev series to solution on non-prismatic beam vibration problems. *Journal of Sounds and Vibration*, 227(2), 1999, s. 449-467.
- [8] Ruta P.: The application of Chebyshev polynomials to the solution of the non-prismatic Timoshenko beam vibration problem, *Journal of Sound and Vibration*, 296, 2006, s. 243–263.
- [9] Chang-New Chen: Variational Derivation of the Dynamic Equilibrium Equations of Nonprismatic Thin-Walled Beams Defined on an Arbitrary Coordinate System, *Mechanics of Structures and Machines: An International Journal*, 26, 1998, s. 219-237.

ANALYSIS OF THE FREE VIBRATION OF A THIN-WALLED NONPRISMATIC BEAM

Summary

This paper deals with the eigenvalue problem of a thin-walled nonprismatic beam described in accordance with the Vlasov theory. The spatial vibration of the beam is described by four compressed (in the general case) equations with variable coefficients. The equations have been solved using the Chebyshev series. The method used is based on the theorem concerning the solution of ordinary differential equations, presented in Paszkowski's monograph: *Numerical application of Chebyshev polynomials and series* (in Polish), PWN, Warsaw, 1975. The recurrence relations obtained by solving the above theorem make it possible to determine the coefficients of the expansions of the sought displacement and rotation functions into Chebyshev series. In the case of free vibrations, the relations have the form of an infinite system of algebraic equations. The considerations apply to a system with arbitrarily variable geometrical and material parameters. The derived formulas make it possible to solve the eigenvalue problem of any beam. It is enough to substitute the expansion coefficients of the parameters of the currently analyzed system into the infinite system of equations. In order to verify the results the calculated eigenfrequencies and forms were compared with the ones obtained using FEM. The Sofistik software was used for the FE analysis. The system was divided into 100 finite prismatic beam elements with seven degrees of freedom. As regards eigenfrequencies, the results obtained using the proposed method were found to be in good agreement with the ones yielded by FEM. The agreement for the eigenforms was worse, which was undoubtedly due to the significantly different ways of solving the considered systems.

Keywords: Vlasov theory, eigenfrequencies and forms, Chebyshev series, recurrence relations, analytical solutions

DOI:10.7862/rb.2014.39

Przesłano do redakcji: 16.05.2014 r.

Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.