

Tomasz Janusz TELESZEWSKI
Politechnika Białostocka

ALGORYTM WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA CORIOLISA PRZEPŁYWÓW LAMINARNYCH W KANAŁACH PROSTOKĄTNYCH METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

W publikacji wyznaczono zależność współczynnika Coriolisa przepływów laminarnych w przewodach prostokątnych całkowicie wypełnionych płynem w zależności od stosunku wysokości do podstawy kanału. Pola prędkości zostały wyznaczone metodą elementów brzegowych (MEB). W celu wykonania symulacji napisano autorski program komputerowy LaminarFlow1D oraz przeprowadzono weryfikację metody na podstawie znanych rozwiązań teoretycznych.

Słowa kluczowe: współczynnik Coriolisa, MEB, obliczenia hydrauliczne

1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach budownictwa i inżynierii środowiska niezbędne są obliczenia hydrauliczne przepływów płynów rzeczywistych przez przewody zamknięte [1, 2]. W obliczeniach hydraulicznych, w których stosuje się równanie Bernoulliego [2], wprowadza się uproszczenie w postaci prędkości średniej v_1 oraz v_2 :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h^s \quad (1)$$

gdzie: p_1 i p_2 – ciśnienia w przekrojach 1 i 2, Δh^s – straty hydrauliczne.

Prędkość średnią można wyznaczyć z zależności [2]:

$$v_{sr} = \frac{Q}{\Lambda} \quad (2)$$

gdzie: Q – strumień objętości przepływu, Λ – pole przekroju przewodu.

Naprężenia styczne w płynach rzeczywistych podczas przepływu powodują powstanie niejednorodnego rozkładu prędkości w przekrojach poprzecznych. Wprowadzenie prędkości średniej w postaci rozkładu jednorodnego niesie ze sobą błędy w członie energii kinetycznej, dlatego aby wykonać dokładne obliczenia hydrauliczne, do równania Bernoulliego (1) wprowadzono współczynnik poprawkowy Coriolisa [2]:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h^s \quad (3)$$

Stosunek rzeczywistego strumienia energii kinetycznej do strumienia obliczonego z prędkości średniej v_{sr} , czyli współczynnik Coriolisa, wyznacza się z następującego wzoru [3]:

$$\alpha = \frac{\int v^3 d\Lambda}{\Lambda v_{sr}^3} \quad (4)$$

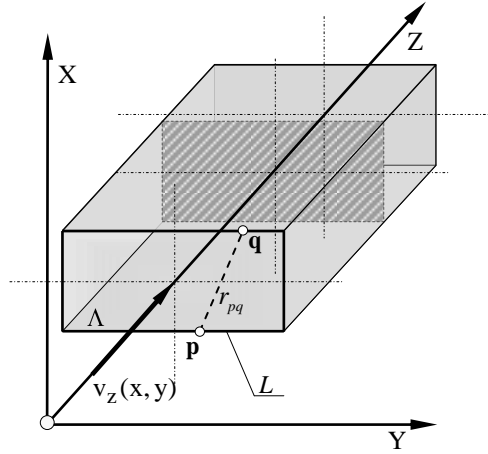
gdzie v jest prędkością w każdym punkcie przekroju Λ .

W przypadku przewodów o przekroju kołowym dla przepływów laminarnych współczynnik Coriolisa wynosi 2, natomiast dla przepływów turbulentnych jest on zbliżony do jedności. Współczynniki Coriolisa dla przewodów o przekrojach różnych od kołowego można obliczyć eksperymentalnie lub numerycznie. W pracy wyznaczono wzór określający współczynnik Coriolisa przepływów laminarnych dla przewodów o przekroju prostokąta w funkcji stosunku wysokości do podstawy kanału.

Do wyznaczenia pola prędkości niezbędnego do obliczeń współczynników Coriolisa przyjęto model jednokierunkowego przepływu cieczy lepkiej, w którym jest możliwe określenie profili prędkości ustalonego ruchu cieczy w prostoliniowych przewodach o dowolnym kształcie w przekroju poprzecznym (rys. 1.). Ustalony laminarny przepływ cieczy lepkiej przez przewód prostosiowy (rys. 1.) opisuje równanie [4]:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = G, \quad G = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (5)$$

gdzie: v_z – prędkość przepływu, dp/dx – gradient ciśnienia, μ – współczynnik lepkości dynamicznej.



Rys. 1. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w obszarze płaskim – jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoliniowy

2. Brzegowe równanie całkowe opisujące rozkład prędkości w przewodzie prostoosiowym przepływu laminarnego

Pole prędkości przepływu jednokierunkowego można podzielić na składową prędkości przepływu niezakłóconego v_∞ oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału v_w [5]:

$$v_z = v_\infty + v_w \quad (6a)$$

gdzie

$$v_\infty = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} x_q^2 + y_q^2 \quad (6b)$$

Funkcja (6b) spełnia równanie (5). Wartość prędkości na brzegu (L) materialnym i nieprzepuszczalnym jest równa zero, wobec czego warunek brzegowy na ścianie (L) przyjmuje postać:

$$v_w(q) = -v_\infty, \quad q \in L \quad (7)$$

W obszarze płaskim Λ przekroju przewodu prostoosiowego ograniczonym brzegiem (L) rozwiązaniem równania różniczkowego (5) jest następujące równanie całkowe (rys. 1.) [5-7]:

$$\frac{1}{2} v_w(\mathbf{p}) + \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \int_{(L)} v_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \quad (8a)$$

gdzie:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right), \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (8b)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2}, \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (8c)$$

gdzie n_x oraz n_y – wersory normalnej do brzegu (L).

Po wyznaczeniu gęstości $g_w(\mathbf{q})$ na linii brzegowej (L) prędkość v_z w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$v_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} v_w(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + v_\infty(\mathbf{p}), \quad (\mathbf{p}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L \quad (9)$$

Objęściowy strumień przepływu hydraulicznego przez przewód o przekroju poprzecznym (Λ) całkowicie wypełniony cieczą jest równy:

$$Q = \iint_{(\Lambda)} v_z(\mathbf{q}) d\Lambda \quad (10)$$

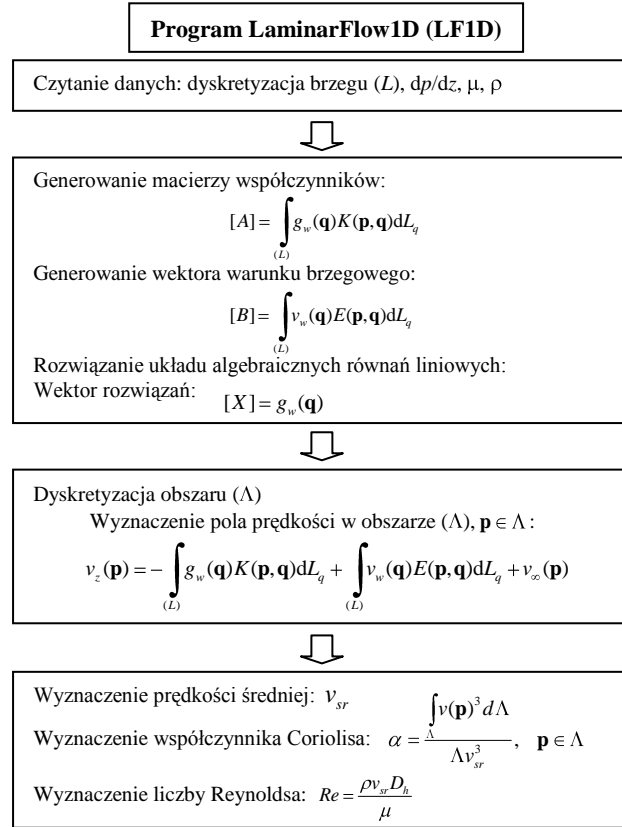
3. Wyznaczenie współczynnika Coriolisa przepływów laminarnych w przewodach prostoosiowych – walidacja metody

W celu wyznaczenia współczynników Coriolisa przepływów laminarnych w przewodach prostoosiowych napisano autorski program komputerowy LaminarFlow1D. Schemat blokowy programu LaminarFlow1D został przedstawiony na rys. 2. Pola prędkości w przekrojach przewodów zostały wyznaczone metodą elementów brzegowych [5-7]. Metoda ta nie wymaga tworzenia rozbudowanych siatek numerycznych, jak to ma miejsce w popularnych metodach obszarowych, np. w metodzie różnic skończonych [8], w metodzie elementów skończonych [9] czy też w metodzie objętości skończonych [10]. Metoda elementów brzegowych również redukuje o rząd wymiar rozwiązywalnych zagadnień, co znacząco wpływa na mniejsze zapotrzebowanie mocy obliczeniowej komputerów.

Obliczenia wykonano dla 4000 stałych elementów na brzegu L . Całki w równaniu (8a) zostały wyznaczone numerycznie metodą trapezów [11], przy założeniu 60 elementów na pojedynczym panelu dl .

Walidacja metody została przeprowadzona przez porównanie wyników obliczeń metody elementów brzegowych ze znanym rozwiązaniem teoretycznym

współczynnika Coriolisa przepływu laminarnego w przewodzie o przekroju kołowym. Liczbę wewnętrznych elementów trójkątnych w obszarze (Λ) przyjęto zgodnie z danymi zawartymi w tab. 1. Przykładowa wewnętrzna siatka składająca się z 1000 trójkątnych elementów została przedstawiona na rys. 3.



Rys. 2. Schemat blokowy programu obliczeniowego LaminarFlow1D (LF1D)

Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla współczynnika Coriolisa w zależności od liczby trójkątnych elementów w obszarze (Λ) wyznaczono z zależności:

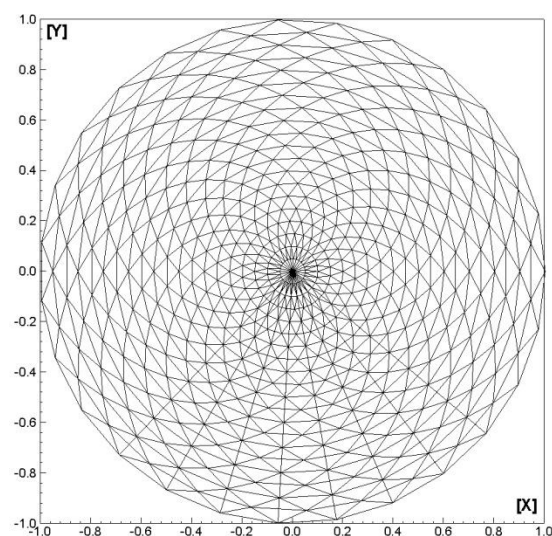
$$\delta\alpha_{\text{MEB}} = \left| \frac{\alpha_{\text{T}} - \alpha_{\text{MEB}}}{\alpha_{\text{T}}} \right| \cdot 100\% \quad (11)$$

gdzie: α_{MEB} – współczynnik Coriolisa wyznaczony metodą elementów brzegowych, $\alpha_{\text{T}} = 2.0$ – rozwiązanie teoretyczne współczynnika Coriolisa dla przepływu laminarnego w przewodzie okrągłym.

Błąd metody MEB w zależności od stopnia zagęszczenia siatki został przedstawiony w tab. 1. Wraz ze wzrostem gęstości siatki w przekroju (Λ) błąd metody elementów brzegowych maleje.

Tabela 1. Współczynnik Coriolisa – błąd rozwiązania MEB

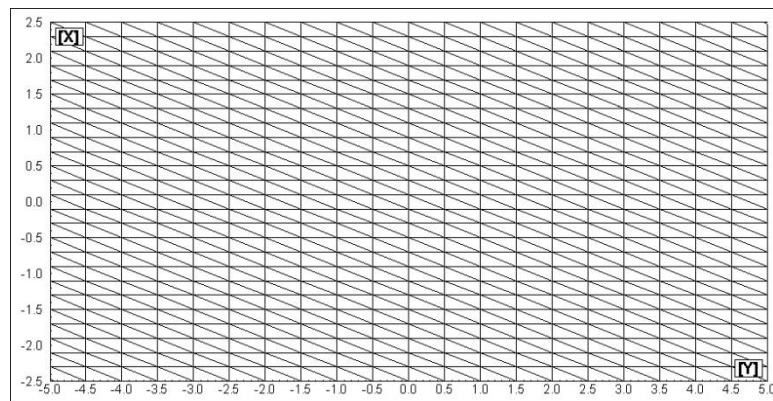
Lp.	Liczba trójkątów	Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie MEB 4000 el.	Błąd MEB
		α_{TEO} [-]	α_{MEB} [-]	$\Delta\alpha_{\text{MEB}}$ [%]
1	50	2,00000E+00	1,57218E+00	2,13908E+01
2	100	2,00000E+00	1,78271E+00	1,08646E+01
3	500	2,00000E+00	1,85332E+00	7,33390E+00
4	1000	2,00000E+00	1,94526E+00	2,73717E+00
5	5000	2,00000E+00	1,98633E+00	6,83304E-01
6	10000	2,00000E+00	1,99524E+00	2,37911E-01
7	50000	2,00000E+00	1,99831E+00	8,43248E-02
8	100000	2,00000E+00	1,99841E+00	7,95298E-02



Rys. 3. Przykładowa siatka do wyznaczania współczynnika Coriolisa składająca się z 1000 trójkątów

4. Określenie wzorów opisujących współczynnik Coriolisa w przewodach prostoosiowych o przekroju prostokąta w funkcji stosunku wysokości do podstawy

Aby wyznaczyć zależność współczynnika Coriolisa w funkcji stosunku wysokości kanału H do jego podstawy A , wykonano obliczenia numeryczne metodą elementów brzegowych, zastosowaną w programie obliczeniowym Laminar-Flow1D dla obwodu przekroju kanału podzielonego na 4000 liniowych elementów na brzegu (L) oraz 80000 elementów trójkątnych w obszarze przekroju (Λ). W obliczeniach numerycznych całek (8b) oraz (8c) zastosowano całkowanie trapezami oraz przyjęto 60 trapezów na pojedynczym liniowym elemencie. Sposób rozmieszczenia elementów trójkątnych w przekroju przewodu przedstawiono na przykładowej siatce składającej się z 1000 elementów (rys. 4.)



Rys. 4. Przykładowa siatka do wyznaczania współczynnika Coriolisa składająca się z 1000 trójkątów

Na podstawie obliczeń numerycznych MEB oraz aproksymacji otrzymanych wyników wyznaczono wzór określający współczynnik Coriolisa α w funkcji stosunku wysokości przewodu prostokątnego H do jego podstawy A :

$$\alpha_{\text{REC}} = f\left(\frac{H}{A}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha_{\text{REC}} = -0,748\left(\frac{H}{A}\right)^2 + 1,351\left(\frac{H}{A}\right) + 1,544, \quad 0 < \frac{H}{A} \leq 1 \quad (12)$$

Aby sprawdzić dokładność zależności (12), wyznaczono błąd $\delta\alpha_{\text{REC}}$ ze wzoru:

$$\delta\alpha_{\text{REC}} = \left| \frac{\alpha_{\text{MEB}} - \alpha_{\text{REC}}}{\alpha_{\text{MEB}}} \right| \cdot 100\% \quad (13)$$

gdzie: α_{MEB} – współczynnik Coriolisa wyznaczony metodą numeryczną, α_{REC} – rozwiązanie współczynnika Coriolisa ze wzoru (12).

W tabeli 2. przedstawiono błąd zależności $\delta\alpha_{\text{REC}}$ dla wybranych argumentów H/A . Maksymalny błąd wyprowadzonej funkcji α_{REC} nie przekracza wartości 1,0%, co świadczy o dużej dokładności wyznaczonej funkcji (12).

Tabela 2. Współczynnik Coriolisa w przewodzie prostokątnym – błąd rozwiązania α_{REC}

Lp.	Stosunek boków H/A	Rozwiązanie MEB 4000 el.	Rozwiązanie $\alpha_{\text{REC}} = f(H/A)$	Błąd funkcji $\alpha_{\text{REC}} = f(H/A)$
	H/A [-]	α_{MEB} [-]	α_{REC} [-]	$\Delta\alpha_{\text{REC}}$ [%]
1	1,00000E+00	2,15405E+00	2,14700E+00	3,27421E-01
2	8,75000E-01	2,14933E+00	2,15344E+00	1,91041E-01
3	7,50000E-01	2,13242E+00	2,13650E+00	1,91490E-01
4	6,25000E-01	2,09793E+00	2,09619E+00	8,28378E-02
5	5,00000E-01	2,03878E+00	2,03250E+00	3,08183E-01
6	3,75000E-01	1,94802E+00	1,94544E+00	1,32380E-01
7	2,50000E-01	1,82076E+00	1,83500E+00	7,81972E-01
8	1,25000E-01	1,68454E+00	1,70119E+00	9,88115E-01
9	5,00000E-02	1,59849E+00	1,60968E+00	7,00249E-01

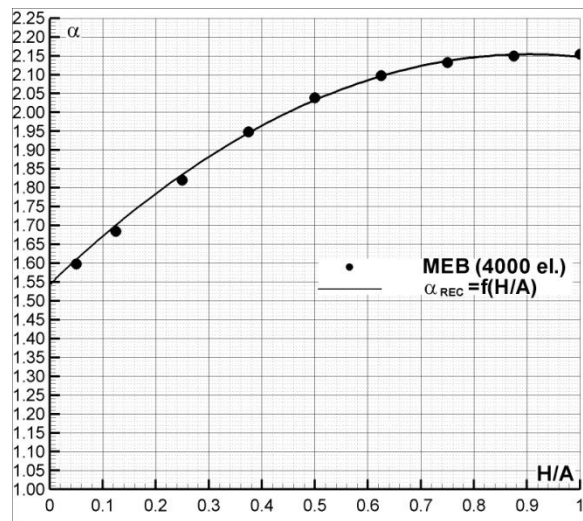
Na rysunku 5. przedstawiono graficzne porównanie funkcji współczynnika Coriolisa α_{REC} z rozwiązaniem metody brzegowych równań całkowych.

Wzór (12) można również stosować w mikroprzepływach [12-14], gdzie profile prędkości są zgodne z profilami w makroprzepływach.

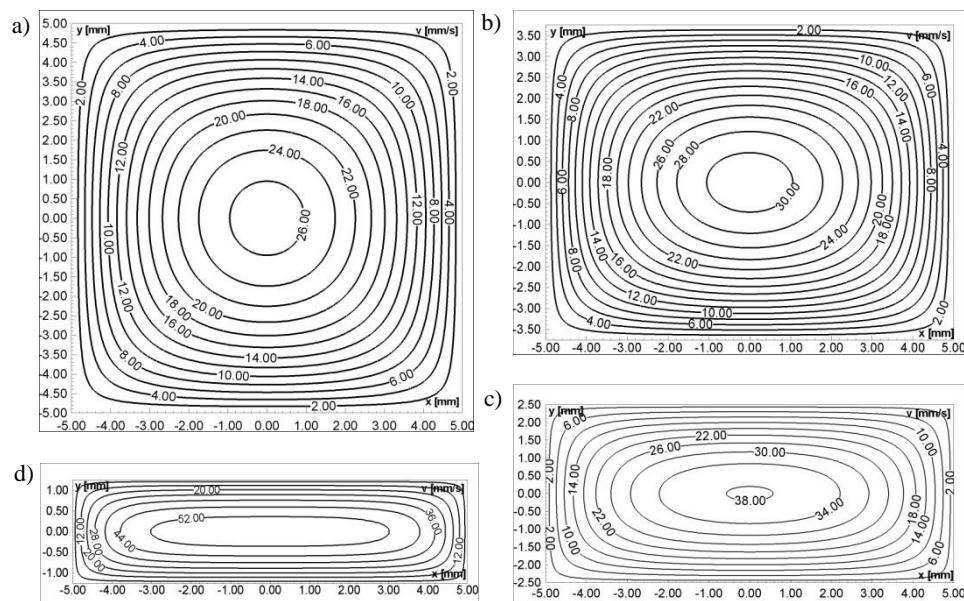
Na rysunku 6. wykreślono przykładowe izotachy przepływu wody w przewodzie prostokątnym o stosunku boków H/A : a) 1, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{4}$ dla $Re = 100$. Liczba Reynoldsa została obliczona, korzystając ze wzoru [1]:

$$Re = \frac{v_{sr} D_h}{\nu}, \quad D_h = \frac{2HA}{H + A} \quad (14)$$

gdzie: D_h – średnica hydrauliczna, $\nu = 0,0128 \text{ cm}^2/\text{s}$ – kinematyczny współczynnik lepkości.



Rys. 5. Porównanie wyprowadzonej funkcji (12) współczynnika Coriolisa α_{REC} z rezultatami obliczeń metody elementów brzegowych



Rys. 6. Przykładowe pola prędkości w przewodzie prostokątnym dla $Re = 100$: a) $H/A = 1.00$, b) $H/A = 0.75$, c) $H/A = 0.50$, d) $H/A = 0.25$

5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych symulacji komputerowych sformułowano następujące wnioski:

- 1) wraz ze wzrostem wartości stosunku wysokości H do podstawy A przewodów prostokątnego przy założeniu $H \leq A$ współczynnik Coriolisa rośnie i osiąga maksimum dla H/A równej jedności,
- 2) zależność $\alpha = f(H/A)$ z dostateczną dokładnością można przybliżyć wielomianem drugiego stopnia.

Wzór (12) może być stosowany w zagadnieniach przepływów laminarnych przez przewody prostoosiowe o przekroju prostokąta, w których wymagana jest wysoka dokładność obliczeń hydraulicznych.

Metoda brzegowych równań całkowych jest metodą konkurencyjną w stosunku do metod siatkowych, takich jak metody różnic skończonych czy też elementów skończonych, ponieważ do obliczeń pola prędkości w przekroju przewodów nie jest wymagana budowa pracochłonnych siatek.

Zastosowana metoda elementów brzegowych w wyznaczaniu profili prędkości w przekrojach może być przydatna zwłaszcza w przepływach w mikrokanałach. Jednocześnie należy podkreślić, że pozwala ona zastąpić bardzo kosztowne eksperymenty.

Literatura

- [1] Nalluri C., Marriott M.: Civil engineering hydraulics, 5th ed. John Wiley and Sons, New York 2009.
- [2] Chadwick A., Morfett J., Borthwick M.: Hydraulics in civil and environmental engineering, 5th ed. Spon Press, New York 2012.
- [3] Czetwertyński E., Utrysko B.: Hydraulika i hydromechanika. Warszawa 1969.
- [4] Batchelor G.K.: An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, New York 2000.
- [5] Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Acta Mechanica et Automatica, vol. 5, no 3, 2011, pp. 124-132.
- [6] Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: Boundary element techniques. Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag, New York 1984.
- [7] Pozrikidis C.: Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flows. Cambridge University Press, New York 1991.
- [8] Mitchell A.R.: The finite difference method in partial differential equations. John Wiley&Sons, New York 1980.
- [9] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.: Finite element method for fluid dynamics, 6th ed. Butterworth Heinemann, Oxford 2005.
- [10] Versteeg H., Malalasekera W.: An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method. Prentice Hall, Glasgow 2007.

- [11] Flannery B.P., Metcalf M., Teukolsky S.A., Press W.H., Vetterling W.T.: Numerical recipes in fortran 90 second edition. Cambridge University Press, New York 1996.
- [12] Sharp K.V., Adrian R.J.: Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes. Experiments in Fluids, vol. 36, Issue 5, 2004, pp. 741-747.
- [13] Celata G.P., Cumo M., McPhail S., Zummo G.: Characterization of fluid dynamic behaviour and channel wall effects in microtube. International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 27, Issue 1, 2006, pp. 135-143.
- [14] Wibel W., Ehrhard P.: Experiments on the laminar/turbulent transition of liquid flows in rectangular microchannels. Heat Transfer Engineering, vol. 30, Issue 1-2, 2009, pp. 70-77.

Opracowanie wykonano w ramach pracy statutowej Wydziału Budownictwa i Inżynierii Środowiska Politechniki Białostockiej.

IMPLEMENTATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE SOLUTION OF CORIOLIS COEFFICIENT UNIDIRECTIONAL LAMINAR FLOW THROUGH STRAIGHT RECTANGLE DUCTS

S u m m a r y

The subject of the presented elaboration is the application of the boundary integral method to calculating Coriolis coefficient (kinetic energy coefficients) driven unidirectional laminar flow in rectangle ducts. The results of calculations the Coriolis coefficient of unidirectional flow through circle pipes with comparisons of numeric solutions with accessible in the literature with analytic solutions showing the satisfactory exactitude and the efficiency the method boundary integral equations to the solution this class of problems of flow in technical uses.

Keywords: Coriolis coefficient, BEM, hydraulic calculations

DOI: 10.7862/rb.2012.11