

Marcin KAMIŃSKI<sup>1</sup>  
Jacek SZAFRAN<sup>2</sup>

## STOCHASTYCZNA ANALIZA DRGAŃ WYMUSZONYCH STALOWYCH WIEŻ TELEKOMUNIKACYJNYCH

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest udokumentowanie analizy komputerowej drgań wymuszonych stalowych wież telekomunikacyjnych wywołanych porywami wiatru przy pomocy Stochastycznej Metody Elementów Skończonych. Metoda ta jest oparta o rozwinięcie wszystkich funkcji losowych w szereg Taylora ogólnego rzędu i wyznaczenie stochastycznej odpowiedzi konstrukcji na gaussowski wejściowy losowy parametr projektowy konstrukcji. Zagadnienie drgań wymuszonych jest rozwiązane numerycznie przy pomocy programu Metody Elementów Skończonych ROBOT Professional, natomiast funkcje odpowiedzi wyznaczono symbolicznie w środowisku algebry komputerowej MAPLE, gdzie zaimplementowano również algorytm wyznaczania charakterystyk losowych odpowiedzi konstrukcji. Deterministyczna postać funkcji odpowiedzi zostaje określona analitycznie z użyciem Metody Najmniejszych Kwadratów i ciągu rozwiązań MES wyznaczonych dla wejściowego parametru losowego zmieniającego wartość wokół swojej wartości oczekiwanej. Testowanym parametrem losowym jest średnia prędkość wiatru, którego ciśnieniem obciążamy modelowaną konstrukcję. Metodę zaproponowaną poniżej można z powodzeniem zastosować do obliczania wskaźnika niezawodności konstrukcji z parametrami losowymi poddanyymi drganiom wymuszonym o zadanych deterministycznych widmach obciążeń.

**Słowa kluczowe:** Stochastyczna Metoda Elementów Skończonych, konstrukcje stalowe, wieże telekomunikacyjne

### 1. Wprowadzenie

Niezawodność wież telekomunikacyjnych jest zagadnieniem kluczowym dla bezpieczeństwa transmisji telefonii komórkowej i zależy od wielu czynni-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Marcin Kamiński, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka, 90-924 Łódź, Al. Politechniki 6, tel. 669 001 636, e-mail: Marcin.Kaminski@p.lodz.pl

<sup>2</sup> Jacek Szafran, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka, 90-924 Łódź, Al. Politechniki 6, tel. 669 001 636, e-mail: Jacek.Szafran@p.lodz.pl

ków, zarówno materiałowych, konstrukcyjnych, jak też i pogodowych.

Wieże telekomunikacyjne wykorzystywane przez operatorów telefonii cyfrowej jako konstrukcje wsporcze dla nowoczesnego sprzętu nadawczo-odbiorczego w większości przypadków wykonywane są ze stali. Jakkolwiek wieże stalowe [15] zabezpiecza się antykorozyjnie najczęściej poprzez ocynkowanie na gorąco, to ulegają one procesom korozji w różnym stopniu i z różnym nasileniem w czasie w zależności od wilgotności powietrza i jego zanieczyszczenia. Losowość tego procesu jest jednakże różna dla rozmaitych lokalizacji, wpływa na zmiany wskaźnika niezawodności w funkcji czasu eksploatacji, stąd też została ona pominięta w modelu obliczeniowym.

Imperfekcje materiałowe i geometryczne były już przedmiotem wcześniejszego stochastycznego modelowania komputerowego [14], stąd też zasadniczą uwagę poświęcono w niniejszym artykule losowym zmianom obciążenia wiatrem jako najbardziej naturalnego źródła losowości w eksploatacji tych konstrukcji. Celem analizy jest zweryfikowanie, w jakim stopniu losowy charakter ciśnienia wiatrem wpływa na parametry losowe odpowiedzi konstrukcji branej pod uwagę przy wyznaczaniu wskaźnika niezawodności w podstawowych stanach granicznych, tj. dla maksymalnej siły osiowej w krawężnikach przy fundamencie oraz dla przemieszczeń poziomych wierzchołka samej wieży. Przedstawione poniżej zagadnienie jest również ciekawe z matematycznego i numerycznego punktu widzenia, jako że dotyczy dynamiki układu o skończonej liczbie swobody obciążonego obciążeniem losowym, którego odpowiedź chcemy znaleźć przy pomocy Stochastycznej Metody Elementów Skończonych zrealizowanej na bazie uogólnionej metody perturbacji stochastycznej, a której zastosowanie do analizy konstrukcji stalowych było przedmiotem wcześniejszych analiz [17]. Jak wiadomo, metoda ta oparta jest o rozwijanie w szereg Taylora wszystkich losowych parametrów wejściowych i wyjściowych konstrukcji, dalszym wyprowadzeniu odpowiednich równań perturbacyjnych dla momentów i charakterystyk odpowiedzi, a także na odpowiednim wykorzystaniu do ich obliczenia testów numerycznych wykonanych z użyciem programu Metody Elementów Skończonych (MES) [1,2].

W pracy posługujemy się Metodą Funkcji Odpowiedzi (MFO), podobną do Metody Powierzchni Odpowiedzi (MPO) [8], która pozwala nam na uzależnienie parametrów stanu takich jak przemieszczenie, czy naprężenie pochodzące od ciśnienia wiatru za pomocą wielomianu dowolnego rzędu (niekoniecznie niższego, jak miało to miejsce w przypadku MPO). Wielomian ten jest wynikiem wykonania szeregu modeli MES dla konstrukcji ze zmieniającą się wielkością ciśnienia wiatru (pakiet MES ROBOT Professional) i wykonaniem Metodą Najmniejszych Kwadratów (MNK) odpowiednich aproksymacji wielomianowych (środowisko algebry komputerowej MAPLE) [3,7]. Wzory na charakterystyki losowe zostały również zaimplementowane w programie MAPLE jako odpowiadające metodzie perturbacji rzędów drugiego, czwartego, szóstego i ósmego; umożliwiają one wyznaczenie wartości oczekiwanych, współczynnika wariancji,

skośności oraz kurtozy dla poszukiwanych przemieszczeń i sił wewnętrznych w modelowanej wieży. Z pewnością tak opracowany aparat numeryczny pozwala na wyznaczenie wskaźnika niezawodności stałego [11] lub zmiennego w czasie [16], a także, w dalszym aspekcie, na weryfikację bezpieczeństwa użytkowania takich konstrukcji w aspekcie pożarowym, czy też przy nasilającej się korozji.

## 2. Model matematyczny

Jak wiadomo, metoda perturbacji stochastycznej oparta jest o rozwinięcie wszystkich funkcji losowych w szereg Taylora rzędu wymaganego dokładnością obliczeń wokół wartości średniej danej funkcji obliczonej dla wartości średniej wejściowego parametru losowego. W takim sformułowaniu założenie gaussowskości wejściowego rozkładu losowego nie jest konieczne, gdyż możemy stosować takie podejście również dla rozkładów niesymetrycznych. Rozwinięcie to dla losowej siły w krawężniku zależnej od prędkości średniej wiatru  $F(v)$  ma postać [7]

$$F(\xi) = F^0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial F(\xi)}{\partial v} \Big|_{v=v^0} \Delta v + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n F(\xi)}{\partial v^n} \Big|_{v=v^0} \Delta v^n \quad (1)$$

gdzie:  $\varepsilon$  – zastosowany parametr perturbacyjny (może być równy 1 lub należeć do pewnego bliskiego otoczenia tego argumentu),

$\omega$  – oznaczenie parametru lub funkcji losowej,

$\xi$  – wartość średnia parametru lub funkcji  $\omega$ ,

$n$  – rząd rozwinięcia w metodzie perturbacji,

$\Delta v$  – różnica wartości parametru  $v$  i jego wartości średniej (wariacja).

Wariacja  $n$ -tego rzędu wejściowego parametru losowego jest określana jako

$$\varepsilon^n \Delta v^n = (\xi - v^0)^n \quad (2)$$

Uwzględniając takie rozwinięcie w klasycznych wzorach całkowych rachunku prawdopodobieństwa [9] można przez całkowanie poszczególnych członów perturbacyjnych wyprowadzić odpowiednie wzory analityczne na centralne momenty probabilistyczne niższych rzędów (np. do czwartego włącznie). Dla wartości oczekiwanej funkcji  $F(v)$  z równania 1 przy założeniu symetrycznego rozkładu prawdopodobieństwa parametru  $v$  otrzymujemy np., iż

$$E[F(v)] = F^0(\xi) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial v^2} \Big|_{v=v^0} \mu_2(\xi) + \frac{1}{4!} \varepsilon^4 \frac{\partial^4 F(\xi)}{\partial v^4} \Big|_{v=v^0} \mu_4(\xi) + \frac{1}{6!} \varepsilon^6 \frac{\partial^6 F(\xi)}{\partial v^6} \Big|_{v=v^0} \mu_6(\xi) + \dots + \frac{1}{m!} \varepsilon^{2m} \frac{\partial^{2m} F(\xi)}{\partial v^{2m}} \Big|_{v=v^0} \mu_{2m}(\xi) \quad (3)$$

gdzie:  $\mu_{2m}$  - centralny moment probabilistyczny rzędu  $2m$  wielkości  $v$ ,  
 $m$  - dowolna liczba naturalna.

Kluczowym problemem rozwinięcia jest wiarygodne (w sensie numerycznym) wyznaczenie pochodnych, szczególnie wyższego rzędu, dla funkcji  $F(v)$  względem parametru  $v$ . Są one co prawda wyznaczane jak dla funkcji deterministycznych, ale MNK zawiera w sobie optymalne dopasowanie samej funkcji, a nie - jej pochodnych. W przeciwieństwie do ogólnie znanego rozwiązania tego problemu uzyskanego z wykorzystaniem Metody Różniczkowania Bezpośredniego stosujemy tutaj Metodę Funkcji Odpowiedzi, gdzie z góry zakładamy wielomianową funkcję odpowiedzi o nieznanach współczynnikach, które ustala się za pomocą ciągu eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Zakładamy więc niezależnie dla sił w prętach oraz przemieszczeń węzłowych, iż

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_m \mathbf{v}^m, \quad \mathbf{q} = \mathbf{B}_n \mathbf{v}^n \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{F}$  - wektor sił wewnętrznych w prętach konstrukcji,

$\mathbf{q}$  - wektor przemieszczeń węzłowych w modelu,

$\mathbf{A}_m$  - macierz współczynników wielomianowej statycznej funkcji odpowiedzi,

$\mathbf{B}_n$  - macierz współczynników wielomianowej kinematycznej funkcji odpowiedzi,

$t$  - parametr czasu.

Powyższe równanie umożliwia analityczne wyprowadzenie wzorów na wszystkie niezbędne centralne momenty losowe (podobnie jak dla momentów zwykłych dowolnego rzędu) przed podjęciem rozwiązania problemu stochastycznego. Oczywiście macierze współczynników odpowiednich rozwinięć wielomianowych są wyznaczane w każdym elemencie skończonym oraz, niezależnie, w każdym węźle, a także oddzielnie - dla wszystkich dyskretnych chwil w czasie. W praktyce rzędy rozwinięć wielomianowych mogą różnić się dla różnych rodzajów odpowiedzi konstrukcji; możliwa jest również każdorazowa optymalizacja rzędu rozwinięcia ze względu np. na korelację punktów próbkowych z przybliżeniem uzyskanym Metodą Najmniejszych Kwadratów. Inną możliwością jest zastosowanie Nieliniowej Metody Najmniejszych Kwadratów, jak też - ważonej wersji dla obydwu z tych podejść.

### 3. Zastosowanie Metody Elementów Skończonych

W analizie związanej z Metodą Elementów Skończonych rozważamy dyskretną aproksymację nieznaną historią ciągłej w czasie i przestrzeni funkcji

przemieszczeń za pomocą wartości węzłowych w dyskretnych punktach siatki jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – wektor historii przemieszczeń w układzie ciągłym,

$\mathbf{q}(t)$  – wektor przemieszczeń węzłowych w modelu,

$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  – macierz funkcji kształtu.

Jak wiadomo, Metoda Funkcji Odpowiedzi [7] wprowadza serie rozwiązań zarówno o charakterze ciągłym, jak i dyskretnym, które łączy ze sobą niezależny od czasu zbiór funkcji kształtu. Mamy więc

$$\mathbf{u}^{\alpha}(\mathbf{x}, t) \approx \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{\alpha}(t), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (6)$$

gdzie:  $M$  – liczba niezależnych testów MES do utworzenia funkcji odpowiedzi.

Oczywiście  $M$  musi być większe niż rząd aproksymowanego wielomianu. Analogicznie aproksymujemy składowe tensora odkształcenia jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{\alpha}(t), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (7)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}(\mathbf{x}, t)$  – ciąg tensorów odkształceń do utworzenia funkcji odpowiedzi,

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$  – macierz pochodnych funkcji kształtu.

Stosujemy taki opis w klasycznym sformułowaniu wariacyjnym odniesionym do przemieszczeń, które w stosowanym podejściu jest równoważne ciągowi równań wariacyjnych przy  $\alpha = 1, \dots, M$  uzyskując

$$\delta \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \mathbf{r} \right] dt = 0, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{R}^T(\mathbf{x}, t)$  – ciąg wektorów historii obciążeń węzłowych,

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  – ciągi macierzy mas i sztywności w MES.

Powszechnie definiujemy te macierze jako

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega. \quad (9)$$

Ponieważ wektor prędkości wiatru jest zmienną losową w rozważanym problemie, tak więc równanie 7 można uprościć do następującej postaci:

$$\delta \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \mathbf{r} \right] dt = 0, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (10)$$

gdzie:  $\delta u$  – wariacja funkcji przemieszczeń  $u$ ,

$t_0, t_k$  – czas początkowy i końcowy rozpatrywanych drgań.

Dalsze całkowanie powyższego równania po czasie pozwala na zapis:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \dot{\mathbf{q}} - \int_0^t \left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} - \mathbf{R}^T \right) \delta \dot{\mathbf{q}} dt = 0. \quad (11)$$

Mając na względzie zerowanie się wariacji w chwili początkowej oraz końcowej

$$\delta \mathbf{q}(0) = 0, \quad \delta \mathbf{q}(t_k) = 0, \quad (12)$$

otrzymujemy zasadę stacjonarności w postaci ogólnie znanych równań ruchu [2,6]

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{R}. \quad (13)$$

Alternatywne metody rozwiązania tego zagadnienia przy pomocy metody perturbacji rzędu drugiego w ujęciu różniczkowania bezpośredniego można znaleźć w pracy [10], a także przy pomocy metod nie wykorzystujących metod perturbacji w pracach [4,9,12,13].

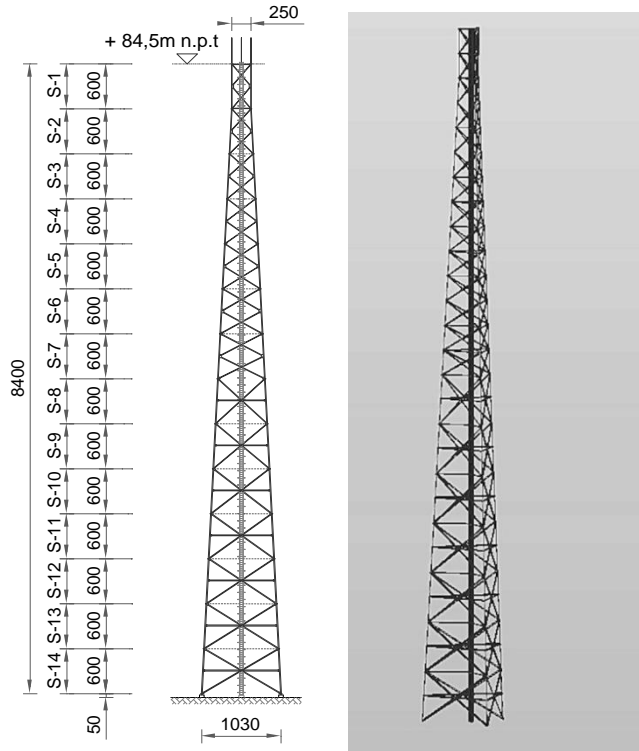
#### 4. Analiza numeryczna

Modelowanie komputerowe przeprowadzono przy pomocy programu MES ROBOT Professional, a także, niezależnie, pakietu do obliczeń symbolicznych MAPLE, wersja 14. Konstrukcję analizowanej stalowej wieży pokazanej na rys. 1, której pojedynczy segment na wysokości fundamentu pokazano na rys. 2; wszystkie elementy konstrukcyjne wykonano w postaci okrągłych prętów pełnych (krawężniki wieży) oraz kątowników gorącowalcowanych równoramiennych i nierównoramiennych (elementy skratowania) ze stali S235. Trójwymiarową dyskretyzację całej wieży na potrzeby MES wykonano przy użyciu 410 dwuwęzłowych elementów belkowych do analizy deformacji giętych, a także 28 dwuwęzłowych elementów kratowych; łącznie wprowadzono 233 węzły i 1374 stopni swobody. Całkowanie równań ruchu przeprowadzono w każdym teście do Metody Funkcji Odpowiedzi zgodnie z algorytmem Hilbera-Hughesa-Taylor'a [6] wprowadzając krok czasowy  $\Delta t = 1$  sek, parametr  $\alpha = -0.3$ , podział na

100 przyrostów i przedział czasowy 700 sekund. Zgodnie z danymi materiałowymi istniejącej konstrukcji przyjęto moduł Younga równy  $E=210$  GPa, a także współczynnik Poissona wynoszący odpowiednio  $\nu=0.30$ .

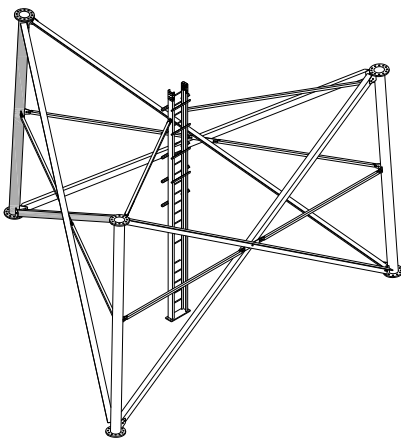
Pominięto w analizie efekty nieliniowości geometrycznych, materiałowych, dopuszczany w tego typu konstrukcjach wpływ oblodzenia, a także zmian własności wytrzymałościowych stali związanych z ewentualnymi fluktuacjami temperatury. Połączenia pomiędzy poszczególnymi segmentami wieży potraktowano jako idealnie sztywne ze względu na ich kołnierzowy kształt oraz ilość łączników śrubowych. Podobnie modelowano połączenia prętów skratowania z krawężnikami ze względu na rozkład i ilość śrub w złączu. Modelowanie obciążenia wiatrem zostało wykonane na podstawie danych pomiarowych zmienności prędkości wiatru w czasie uśredniania 10 minut podanych w [5]. Wartości obciążenia wiatrem uwzględniały również opór aerodynamiczny analizowanej konstrukcji. Jak wynika ze skali osi pionowej wykresu na rys. 3, maksymalne wartości tej prędkości znacznie przekraczają wartość bazową braną pod uwagę w obliczeniach zastępczego ciśnienia statycznego w pierwszej strefie obciążenia wiatrem. Wejściowym parametrem losowym jest prędkość wiatru, która ma rozkład prawdopodobieństwa Gaussa, zmiany wartości oczekiwanej w czasie zaczerpnięte zostały z danych przykładowych rejestracji silnych wiatrów, natomiast współczynnik wariancji jest dodatkowym parametrem wejściowym w modelu. W celu weryfikacji probabilistycznej zbieżności metody perturbacji wykonano analizę rzędu drugiego, czwartego, szóstego i ósmego przedstawiając w dalszej części uzyskane momenty losowe w funkcji rzędu zastosowanej metody perturbacji.

W wyniku deterministycznego modelowania komputerowego określono kolejno zmiany w czasie ekstremalnej siły podłużnej w krawężniku dolnego segmentu (rys. 4), w sąsiednim elemencie skratowania (rys. 5), a także zmiany w czasie przemieszczenia poziomego wierzchołka wieży (rys. 6); wybór tych wielkości wynika z analizowanych stanów granicznych nośności i użytkowania sprawdzanych dla tego typu konstrukcji. Jak wynika z porównania rys. 4 i 5, krawężniki są znacznie bardziej wyęteżone od prętów skratowania, natomiast przemieszczenie poziome wierzchołka zbliża się do wartości wymaganej przez odpowiedni stan graniczny. Porównanie zmian prędkości i wszystkich funkcji stanu wskazuje wyraźnie, że położenie wartości ekstremalnych badanych wielkości pokrywa się ze sobą w funkcji czasu i dokładnie odpowiada ekstremalnym wartościom wymuszenia. W dalszym ciągu numerycznie określano funkcje odpowiedzi – tj. zależność pomiędzy ekstremalną siłą oraz ekstremalnym przemieszczeniem, a losowym parametrem wejściowym, czego wyniki są udokumentowane na rys. 7 – siedem testów dynamicznych MES pozwoliło na odtworzenie funkcji liniowej pomiędzy prędkością wiatru i otrzymaną ekstremalną siłą w krawężniku. Zależność ta weryfikuje spodziewaną bezpośrednią proporcjonalność działającego ciśnienia do obliczonej siły w najbardziej wyęteżonym elemencie konstrukcyjnym wieży.



Rys. 1. Schemat analizowanej konstrukcji wieżowej wraz z modelem obliczeniowym

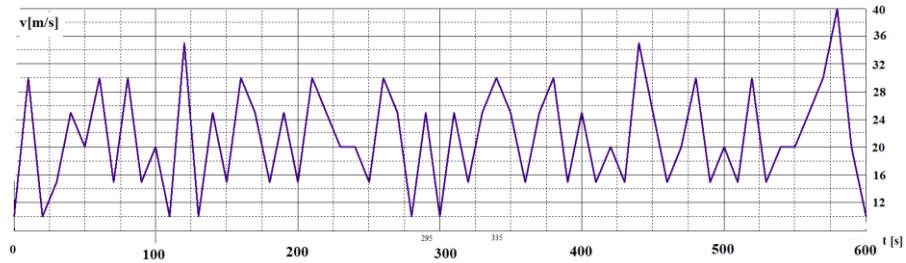
Fig. 1. Scheme of the analyzed tower structure with computational model



Rys. 2. Widok aksonometryczny najniższego segmentu wieży

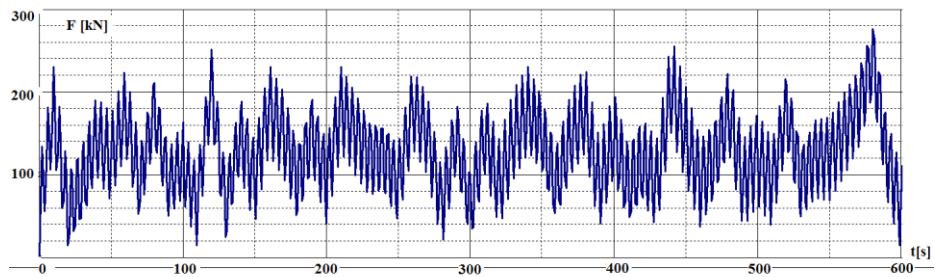
Fig. 2. Axonometric view of the lowest section of the tower





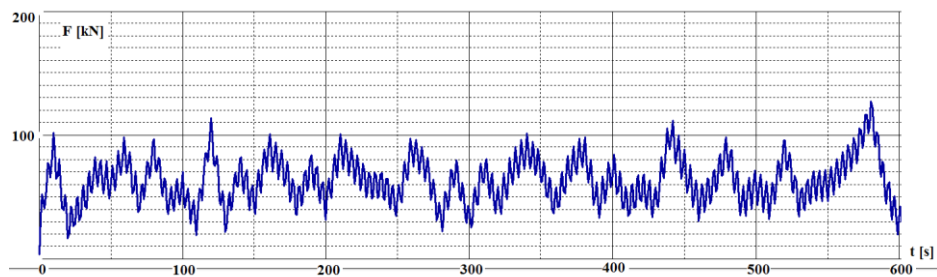
Rys. 3. Wykres zależności prędkości wiatru w funkcji czasu

Fig. 3. Graph of the wind velocity in the function of time



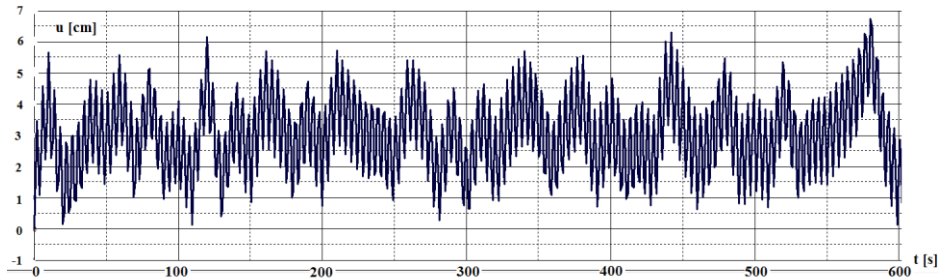
Rys. 4. Wykres zależności siły podłużnej w krawężniku dolnego segmentu w funkcji czasu

Fig. 4. Graph of the axial force in the leg of the tower lowest section as a function of time



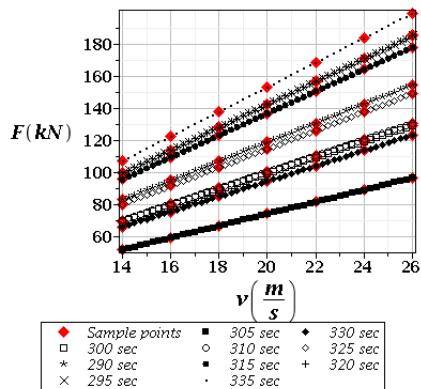
Rys. 5. Wykres zależności siły podłużnej w elemencie skratowania dolnego segmentu w funkcji czasu

Fig. 5. Graph of the axial force in the bracing of the tower lowest section as a function of time



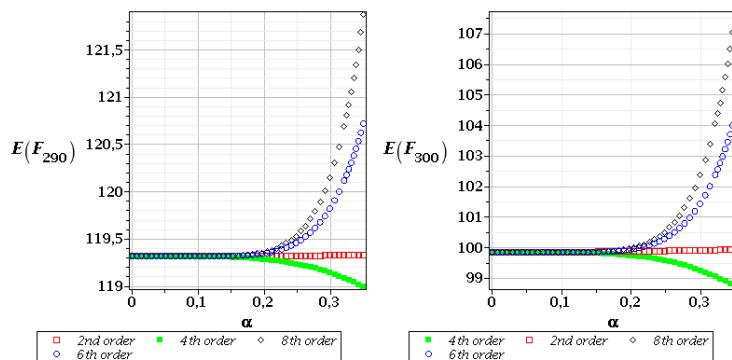
Rys. 6. Wykres przemieszczeń wierzchołka wieży w funkcji czasu

Fig. 6. Graph of the displacement of the top of the tower as a function of time



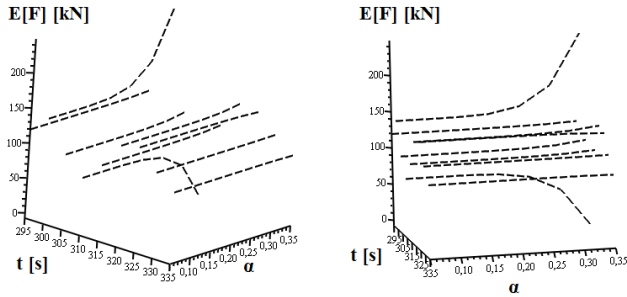
Rys. 7. Wykres funkcji odpowiedzi dla poszczególnych chwil czasowych i siły osiowej w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 7. Response function plots according to particular time moments and axial force in leg of the tower lowest section



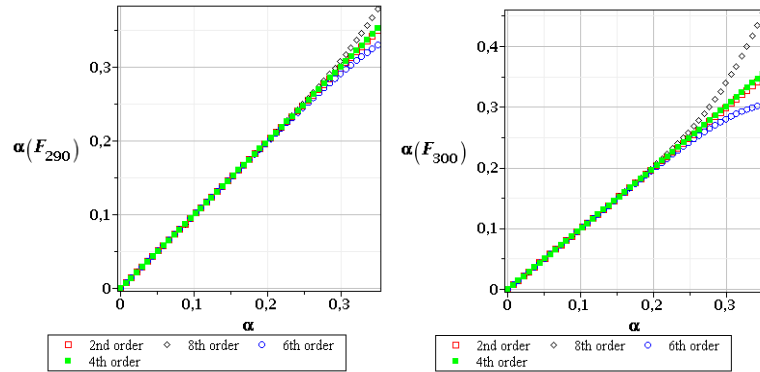
Rys. 8. Wartości oczekiwane sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 8. Expected values of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



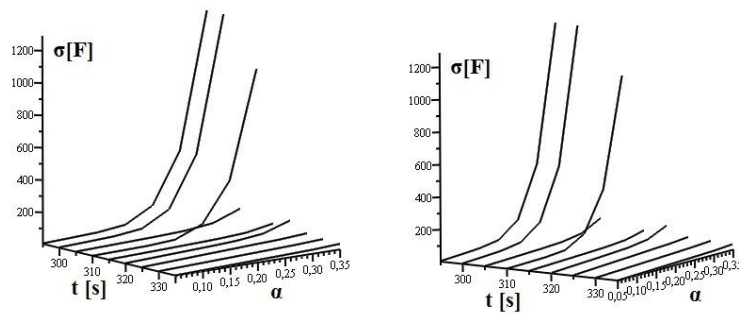
Rys. 9. Wartości oczekiwane sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 9. Expected values of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



Rys. 10. Współczynnika wariancji sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 10. Coefficient of variation of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



Rys. 11. Odchylenia standardowe sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 11. Standard deviations of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower

Kolejno zgromadzono wartości oczekiwane sił osiowych w funkcji wejściowego współczynnika wariancji (rys. 8), a także współczynnika wariancji i czasu (rys. 9). Przedział zmienności współczynnika wariancji wybrano dość duży ze względu na naturalnie przypadkowy charakter zjawiska. Wartości oczekiwane obliczono symbolicznie stosując przybliżenie rzędu drugiego, czwartego, szóstego oraz ósmego, a ich porównanie wskazuje jedno-znacznie, że rząd przybliżenia jest istotny dla  $\sigma^2$ , czyli przy dużych fluktuacjach losowych modelowanego obciążenia wiatrem. Zgodnie z rys. 9 rząd wartości średniej siły w najbardziej wyężonym pręcie może zmieniać się w efekcie porywów wiatru wielokrotnie, nawet w odstępie kilkusekundowym. Współczynniki wariancji ekstremalnej siły osiowej są dla  $\sigma^2$  liniowo zależne od tego parametru, a rząd metody perturbacji nie ma wpływu na uzyskane wyniki. Przy analiza momentów drugiego rzędu staje się mało stabilna, co wskazuje na konieczność opracowania kryterium automatycznego wyboru rzędu przybliżenia. Zestawienie wyników numerycznych kończy wizualizacja odchylenia standardowego ekstremalnej siły ścisnącej w krawężnikach wieży (rys. 11). Jest ono wykonane zarówno w funkcji wejściowego współczynnika wariancji, jak i czasu, tak więc może posłużyć wraz z danymi z rys. 9 do obliczenia wskaźnika niezawodności zmiennego w trakcie drgań dla badanej konstrukcji.

## 5. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiona w pracy metoda perturbacji stochastycznej dowolnego rzędu w połączeniu z klasyczną Metodą Elementów Skończonych pozwala na wyznaczanie momentów losowych dynamicznej odpowiedzi konstrukcji przy relatywnie niewielkim nakładzie obliczeniowym. Podejście to jest efektywne również do numerycznej analizy drgań konstrukcji przestrzennych takich jak wieże stalowe przy dynamicznym wymuszeniu losowymi porywami wiatru. Metoda perturbacji w wersji wykorzystującej Metodę Funkcji Odpowiedzi wyznaczaną Metodą Najmniejszych Kwadratów na podstawie wielokrotnych rozwiązań uzyskanych przy pomocy MES umożliwia wyznaczenie podstawowych charakterystyk losowych dla historii przemieszczeń czy naprężeń w konstrukcjach. Parametry losowe stosowane w analizie nie muszą mieć rozkładu Gaussa, ale przy wielu zmiennych niezbędna jest szczegółowa informacja dotycząca korelacji wyższego rzędu w celu wyprowadzenia niezbędnych wzorów na momenty losowe.

Niezwykle przydatnym narzędziem jest program do obliczeń symbolicznych, który umożliwia automatyczne reprezentacje wybranych zmiennych za pomocą szeregu Taylora dowolnego rzędu. Przeprowadzone symulacje komputerowe pozwalają stwierdzić jednoznacznie, że rozrzut losowy funkcji niezbędnych do określenia podstawowych stanów granicznych w wieżach poddanych losowemu działaniu wiatru jest wielokrotnie większy od losowych fluktuacji amplitudy ciśnienia wiatrem – zależność wyjściowych współczynników wa-

riancji jest silnie nieliniowa w stosunku do odpowiedniego współczynnika wariacji obciążenia wiatrem.

Wyniki uzyskane w pracy znajdują bezpośrednie zastosowanie do obliczenia wskaźników niezawodności np. Cornella dla wież telekomunikacyjnych niezależnie dla SGN oraz SGU i mogą być porównane z wartościami przedstawionymi tabelarycznie w normie Eurocode 0. Dalsze eksperymenty numeryczne pozwolą na porównanie uzyskanych rezultatów z wynikami metody symulacji Monte-Carlo, a także na wyznaczenie parametrów losowych wyższego rzędu, tj. skośności i kurtozy pomocnych przy weryfikacji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi konstrukcji.

## Literatura

- [1] Bathe K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 1996.
- [2] Clough R.; Penzien J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York 1975.
- [3] Cornil J.M.; Testud P.: *An Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, Berlin 2004.
- [4] Elishakoff I.: *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*. Wiley & Sons, New York 1983.
- [5] Flaga A.: *Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania*. Arkady, Warszawa 2008.
- [6] Hughes T.J.R.: *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., New York 2000.
- [7] Kamiński M.: *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. Wiley & Sons, Chichester 2013.
- [8] Khuri A.I., Cornell J.A.: *Response Surfaces: Design and Analysis*. Marcel Dekker, New York 1987.
- [9] Lin Y.K.: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill, New York 1961.
- [10] Liu W.K., Belytschko, T., Mani, A.: Random field finite elements. *Int J Num Meth Engrg*, nr 23, 1986, s. 1831–1845.
- [11] Melchers R.E.; Horwood, E.: *Structural Reliability. Analysis and Prediction*. Wiley & Sons, Chichester 1987.
- [12] Mironowicz W.; Śniady P.: Dynamics of machine foundations with random parameters. *J Sound Vibr*, nr 112, 1987, s. 23-30.
- [13] Moller B., Beer M.: *Fuzzy Randomness. Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 2004.
- [14] Papadopoulos V., Papadrakakis M., Deodatis G.: Analysis of mean and mean square response of general linear stochastic finite element systems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, nr 195, 2006, s. 5454–5471.
- [15] Rykaluk K.: *Konstrukcje stalowe: kominy, wieże, maszty*. Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2007.
- [16] Van Noortwijk J.M., Frangopol D.M.: Two probabilistic life-cycle maintenance models for deteriorating civil infrastructures. *Prob Engrg Mech*, nr 19, 2004, s. 345–359.
- [17] Waarts P.H.; Vrouwenvelder A.C.W.M.: Stochastic finite element analysis of steel structures. *J Constr Steel Res*, nr 52, 1999, s. 21–32.

## STOCHASTIC ANALYSIS OF THE FORCED VIBRATIONS OF STEEL TELECOMMUNICATION TOWERS

### Summary

The main aim of this paper is a presentation of computational analysis of the forced vibration of the steel telecommunication tower resulting from the uncertain wind blows with the use of the Stochastic Finite Element Method. This approach is based upon the Taylor expansion with random coefficients of a general order for all input and output random functions and determination of the structural response related to some input Gaussian design parameter. The forced vibration problem is solved numerically by using the Finite Element Method system ROBOT Professional, while the response functions are determined symbolically in the environment of the program MAPLE, where all the probabilistic coefficients are additionally computed. Deterministic form of the response functions are derived analytically with the help of the Least Squares Method and the series of the FEM-based experiments provided for the several discrete values of the design parameter that fluctuates about its expected value. The basic random parameter considered here is mean velocity of the wind, whose pressure is applied on the tower skeleton. The method proposed in this elaboration may be successfully further applied for a determination of the reliability indices for various engineering structures exhibiting different random parameters and also with deterministic loading spectra.

**Keywords:** Stochastic Finite Element Method, steel structures, telecommunication towers

DOI:10.7862/rb.2014.28

*Przesłano do redakcji: 26.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*