

Jacek JAWORSKI¹
Olga SZLACHETKA²

DRGANIA WŁASNE SŁUPÓW W KSZTAŁCIE ŚCIĘTEGO STOŻKA

Przedmiotem analizy jest pierwsza postać drgań własnych (giętnych) słupów o dolnym końcu utwierdzonym, a górnym swobodnym, z materiału jednorodnego i sprężystego. Badane słupy mają kształt ściętego stożka o różnych zbieżnościach ścianek bocznych, od stożka do walca. Metodą energetyczną określono pierwszą częstość drgań własnych, przyjmując różny kształt wychylenia osi podłużnej drgającego słupa, określonej funkcjami: cosinus, kwadratową, sześcienną i linią ugięcia statycznego osi słupa pod działaniem siły poziomej przyłożonej do jego wierzchołka. Otrzymane częstości (względnie okresy drgań) porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (ANSYS) i z obliczeniami według tablicy Z-2-2 normy PN-77/B-02011. Dobra zgodność wyników występuje jedynie w zakresie małych zbieżności ścianek stożka. Stwierdzono dużą zgodność kształtu linii ugięcia osi podłużnej słupa wychylonej podczas drgań (określonego w programie ANSYS) z kształtem linii ugięcia statycznego słupa (belki wspornikowej) przy obciążeniu ciągłym o wartości stałej i liniowo zmiennej. Przyjęcie takich kształtów deformacji osi drgającego słupa do wyprowadzenia metodą Rayleigh'a wzorów na pierwszą częstość drgań własnych może więc prowadzić do lepszej dokładności wyników (zgodności z obliczeniami MES).

Słowa kluczowe: słup stalowy, linia ugięcia, pierwsza częstość drgań własnych

1. Okres drgań własnych

Częstości kolejnych postaci drgań własnych belki można otrzymać rozwiązując dla określonych warunków brzegowych równanie drgań belki Bernoulliego–Eulera. W pracy [2] dla belki w kształcie ściętego stożka podano rozwiązanie w postaci funkcji Bessela, a zastąpienie ich wielomianami umożliwiło uży-

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Jacek Jaworski, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, tel. (22) 5935109, e-mail: jacek_jaworski@sggw.pl

² Olga Szlachetka, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, tel. (22) 5935110, e-mail: olga_szlachetka@sggw.pl

skanie rozwiązań numerycznych. Inne metody i dalsze wyniki rozwiązań dla belek o zmiennych przekrojach poprzecznych omówiono w pracy [3].

Autorzy tej pracy stawiają sobie za cel wyprowadzenie metodą Rayleigh'a przybliżonych wzorów na pierwszą częstość drgań własnych (giętych) słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka. Założono, że amplituda drgań jest mała, materiał jednorodny, izotropowy i idealnie sprężysty, a masa jest rozłożona w sposób ciągły, co prowadzi czasem do dużych trudności przy całkowaniu. Jeśli znajdzie się jednak rozwiązanie zamknięte, uzyskujemy wzór tak prosty, że do obliczenia częstości (lub okresu) drgań wystarczy pod ręczny kalkulator.

W metodzie Rayleigh'a zakłada się kształt wychylenia osi słupa podczas drgań. Przyjęto, że kształt ten jest opisany linią ugięcia statycznego osi słupa pod działaniem siły poziomej, przyłożonej do jego wierzchołka, funkcją trygonometryczną jak we wzorze (1), funkcją kwadratową (2), oraz sześcienną (3).

$$u \llcorner \rceil = f P \left(1 - \cos \frac{\pi}{2H} h \right) \quad (1); \quad u \llcorner \rceil = \frac{f P}{H^2} h^2 \quad (2); \quad u \llcorner \rceil = \frac{f P}{H^3} h^3 \quad (3)$$

gdzie: u, h – współrzędne (u określa ugięcie, h – wysokość),

H – wysokość słupa,

P – siła pozioma przyłożona do wierzchołka słupa,

f – przemieszczenie wierzchołka słupa pod działaniem siły $P = 1$.

Przy założeniu, że wychylona podczas drgań oś słupa w kształcie ściętego stożka ma kształt linii ugięcia statycznego pod działaniem siły skupionej P , okres drgań wyrażony jest wyprowadzonym w pracy [4] wzorem

$$T = \frac{4\pi H^2}{d} \sqrt{\frac{\rho \left(1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n \right)}{3E \llcorner -1 \rceil n^3}} \quad (4)$$

gdy kształt osi opisany jest wzorem (1), okres drgań [6] wynosi

$$T = \frac{4H^2}{d} \sqrt{\frac{2\rho}{3\pi E n^3} \left[\pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi \llcorner 5n - 1 \rceil \llcorner -1 \rceil + 64 \llcorner -1 \rceil^2 \right]} \quad (5)$$

a dla kształtu osi opisanego wzorami (2) i (3), okres drgań wynosi

$$T = \frac{8\pi H^2}{3d} \sqrt{\frac{\rho \left(n^2 + 5n + 15 \right)}{35E n^3}} \quad (6); \quad T = \frac{4\pi H^2}{3d} \sqrt{\frac{\rho \left(n^2 + 7n + 28 \right)}{21E n^3}} \quad (7)$$

gdzie: T – okres drgań,

ρ – gęstość masy,

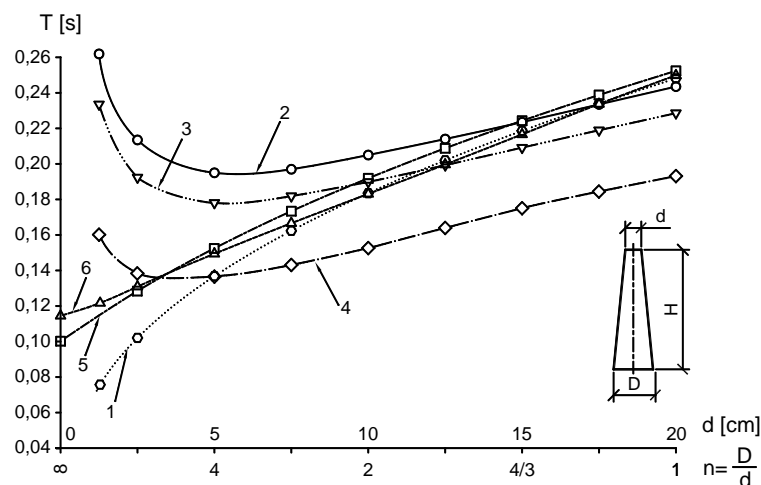
E – moduł sprężystości podłużnej,

n – iloraz średnic słupa: dolnej D i górnej d ; $n = \frac{D}{d}$.

Warto zauważyć, że w żadnym z powyższych przypadków nie można wyznaczyć okresu drgań słupa w kształcie stożka, bo wyrażenie na ugięcie wierzchołka stożka przyłożoną do niego siłą poprzeczną nie ma sensu matematycznego. Okres drgań walca nie może być traktowany jako przypadek szczególny okresu drgań ściętego stożka; wzory dla walca są wyprowadzane oddzielnie.

Na rysunku 1 porównano okresy drgań własnych stalowych słupów w funkcji zbieżności ścianek bocznych stożka, określonych parametrem n . Obliczenia wykonano dla słupów stalowych o wysokości $H = 6$ m, średnicy podstawy $D = 20$ cm i średnicach głowicy od $d = 0$ (stożek) do $d = 20$ cm (walec).

Wyniki obliczeń MES w programie ANSYS są bardzo bliskie wynikom pracy [2] i obliczeniom według tablicy Z-2-2 normy PN-77/B-02011 [7]. Obliczenia według wzorów 4 i 5 cechuje dobra zgodność z MES w zakresie małych zbieżności stożka, przy dużych wartościach parametru n wyniki są niezgodne. Wzory (6) i (7), a szczególnie (7) gorzej odzwierciedlają wyniki obliczeń MES.



Rys. 1. Porównanie okresów drgań obliczonych: 1– według wzoru (4), 2– według (5), 3– według (6), 4– według (7), 5– MES (ANSYS), 6– według PN-77/B-02011

Fig. 1. Comparison of natural periods calculated: 1– by eq. (4), 2– by eq. (5), 3– by eq. (6), 4– by eq. (7), 5– using FEM (ANSYS), 6– according to the standard PN-77/B-02011

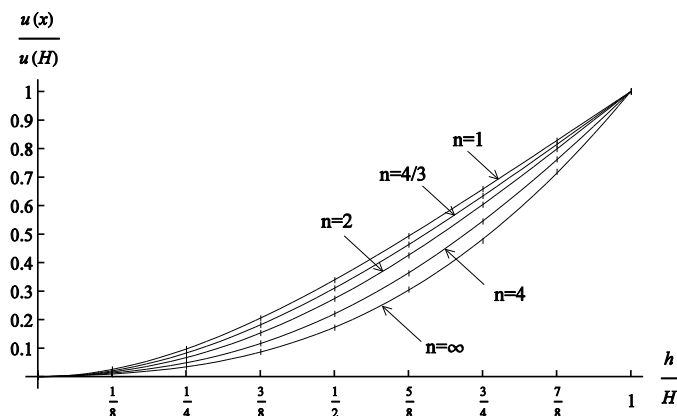
Wzory (4÷7) można – przy niewielkiej modyfikacji – wykorzystać do słupów w kształcie ostrosłupa ściętego prawidłowego i dla szczególnego przypadku rury

stożkowej, gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego (otworu) przecinają się w jednym punkcie na osi stożka [4]. Natomiast próba wyprowadzenia wzoru analogicznego do (4) dla słupa w kształcie współosiowo wydrążonego ściętego stożka, prowadzi do znacznych trudności obliczeniowych [5].

2. Kształt linii ugięcia osi słupa

2.1. Wyniki obliczeń w programie ANSYS

Im dokładniej w obliczeniach metodą Rayleigh'a przyjmujemy kształt linii wychylenia osi drgającego słupa, tym dokładniejsze będą wyniki obliczenia częstotliwości i okresu drgań [1]. Ponieważ nie jest znany rzeczywisty kształt osi drgającego słupa, jako podstawę do oceny analizowanych linii odkształcenia przyjęto wyniki obliczeń MES (z programu ANSYS), które pokazano na rys. 2. Odnosząc ugięcia na danej wysokości do ugięcia wierzchołka słupa, a wysokości do wysokości słupa, otrzymano wykresy dla wartości bezwymiarowych. Poszczególne krzywe dotyczą różnych zbieżności ścianek stożka.



Rys. 2. Kształt wychylenia osi drgającego słupa określony MES (ANSYS)

Fig. 2. Deflection form of the column axis during the vibration determined by FEM (ANSYS)

2.2. Badane przypadki ugięcia statycznego

Określono kształty linii ugięcia odwzorowujących słupy belek wspornikowych w kształcie ściętego stożka, pod statycznie działającym obciążeniem. Uwzględniono siłę skupioną przyłożoną do swobodnego końca (rys. 3a), obciążenie ciągłe o stałej wartości (rys. 3b) i obciążenie ciągłe liniowo zmienne, proporcjonalnie do zmiany średnicy pręta (rys. 3c). Ugięcia policzono całkując równania różniczkowe osi odkształconej pręta. Średnicę pręta i moment bezwładności przekroju wyrażono w funkcji współrzędnej x

$$D \left(\frac{d}{H} \right) = d + \frac{D-d}{H} x \quad (8); \quad J \left(\frac{d}{H} \right) = \frac{\pi D^4}{64} \quad (9)$$

Momenty gnące dla kolejnych przypadków z rysunku 3a, 3b i 3c wyrażono jako

$$M \left(\frac{d}{H} \right) = -Px \quad (10); \quad M \left(\frac{d}{H} \right) = -\frac{qx^2}{2} \quad (11) \quad M \left(\frac{d}{H} \right) = -\frac{qx^2}{6D} (x+3d) \quad (12)$$

i wstawiono do równania różniczkowego osi ugiętej

$$EJ \left(\frac{d}{H} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} = -M \left(\frac{d}{H} \right) \quad (13)$$

wprowadzając w celu uproszczenia zapisu podstawienie

$$a = \frac{D-d}{H} = \left(1 - \frac{d}{D} \right) \frac{1}{H} \quad (14)$$

gdzie: x, u – współrzędne (u określa ugięcie),

P – siła skupiona,

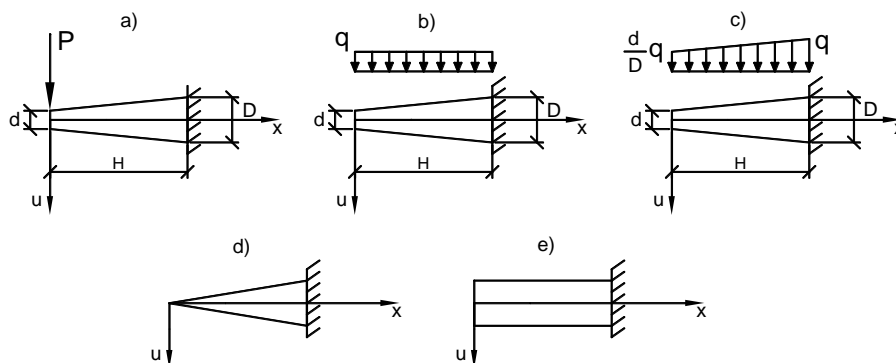
q – obciążenie ciągłe,

d, D – średnice pręta,

H – długość pręta,

J – moment bezwładności przekroju,

M – moment zginający.



Rys. 3. Belki wspornikowe: a) obciążenie siłą skupioną na swobodnym końcu, b) obciążenie ciągłe stałe, c) obciążenie ciągłe liniowo zmienne, d), e) przypadki szczególne

Fig. 3. Cantilever beams: a) concentrated load on the free end, b) uniformly loaded, c) linear variable continuous load, d), e) special cases

Dla obciążenia siłą skupioną przyłożoną do swobodnego końca pręta (jak na rysunku 3a) otrzymano po scałkowaniu zależność

$$u = \frac{32P}{\pi E a^2 D^2} \left[\frac{3D-2d}{3D} \langle -H \rangle \right] + \frac{32P}{\pi E a^3} \left[\frac{d-3D}{3D^2} + \frac{1}{ax+d} - \frac{d}{3 \langle x+d \rangle} \right] \quad (15)$$

dla obciążenia ciągłego o stałej wartości (jak na rysunku 3b) równanie

$$u = \frac{32q}{\pi E} \left[\frac{3D^2 - 3Dd + d^2}{3a^3 D^3} \langle -H \rangle \right] + \frac{32q}{\pi E a^4} \left[\ln \frac{D}{ax+d} + \frac{d}{D} - \frac{d^2}{6D^2} - \frac{d}{ax+d} + \frac{d^2}{6 \langle x+d \rangle} \right] \quad (16)$$

a dla obciążenia ciągłego liniowo zmiennego, jak na rysunku 3c, wzór

$$u = \frac{32qx}{\pi E D^4 a^4 H} \left[\frac{D^4}{3} - \frac{D^3 d}{3} - \frac{D^2 d^2}{2} + \frac{13Dd^3}{18} - \frac{2d^4}{9} + \frac{D^3 d - D^4}{3} \ln D \right] + \frac{32q}{\pi E D^4 a^4} \left[\frac{D^4}{3} - \frac{D^3 d}{6} + D^2 d^2 - \frac{5Dd^3}{6} + \frac{2d^4}{9} - \frac{1}{3} D^3 d \ln D + \frac{D^3 d^3}{6 \langle x+d \rangle} - \frac{D^3 d^2}{ax+d} - D^3 d \ln \langle x+d \rangle \right] + \frac{32q}{\pi E D^4 a^4} \left[\frac{D^3 a^4 x^4}{18d \langle x+d \rangle} - \frac{D^3 d^3}{9 \langle x+d \rangle} - \frac{D^3 a^2 x^2}{18d} - \frac{5}{9} D^3 ax - \frac{D^3 d}{3} + \frac{13D^3 d^2}{18 \langle x+d \rangle} + \frac{D^3}{3} \langle x+4d \rangle \ln \langle x+d \rangle \right] \quad (17)$$

W przypadku obciążenia belki siłą skupioną P przyłożoną na jej swobodnym końcu lub obciążeniem ciągłym o stałej wartości q , rozwiązanie dla ugięcia swobodnego końca pręta w kształcie stożka nie istnieje. Natomiast dla przypadku obciążenia ciągłego liniowo zmiennego jak na rysunku 3d, przyłożonego do słupa w kształcie stożka, gdy x dąży do 0, ugięcie dąży do wartości

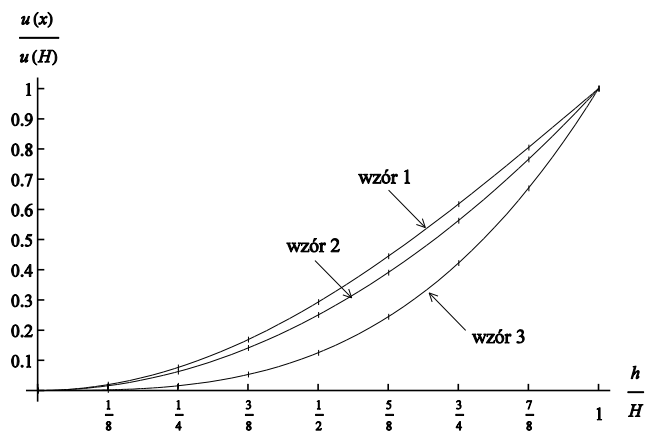
$$u = \frac{32qH^4}{3\pi E D^4} \quad (18)$$

Ugięcia belek w kształcie walca (rys. 3e) nie są przypadkiem szczególnym rozwiązań dla ściętego stożka i policzone zostały oddzielnie. Dla obciążenia ciągłego o stałej wartości q , ugięcie wyrażone jest jako

$$u = \frac{8q}{3\pi ED^4} \left(3H^4 - 4H^3x + x^4 \right) \quad (19)$$

Linie ugięcia belek pokazano na rysunkach 4 i 5. Kolejne wykresy na rysunku 5 odnoszą się do różnych sposobów obciążenia belki. Porównując kształt tych linii z wyznaczonym metodą elementów skończonych kształtem osi drgającego słupa, pokazanym na rysunku 2, można ocenić, dla którego z obciążeń linie ugięcia najlepiej odwzorowują kształt wychylonej osi drgającego słupa.

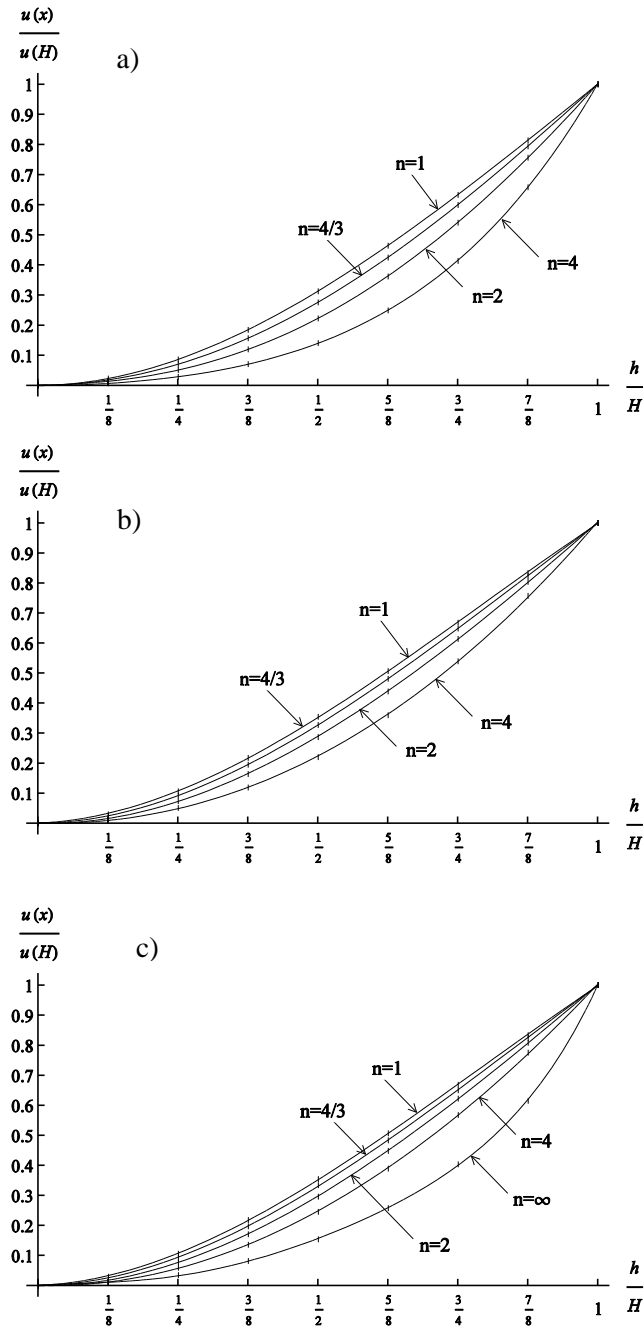
Rys. 4. Linie ugięcia belek wspornikowych opisane funkcjami jak we wzorach (1), (2), (3)
Fig. 4. Bending lines of cantilever beams described with functions from eqs. (1), (2), (3)



2.3. Ocena zgodności kształtu linii ugięcia z kształtem wychylenia osi słupa podczas drgań swobodnych

W celu oceny, jak blisko położone są linie ugięcia względem wychylonej osi drgającego słupa wprowadzono wskaźnik podobieństwa w (wzór 20), będący pierwiastkiem z sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami bezwymiarowego ugięcia statycznego i bezwymiarowych rzędnych linii wychylenia osi drgającego słupa, określonej w programie ANSYS. Zsumowano wartości dla ośmiu punktów rozłożonych równomiernie na wysokości słupa i dla słupów o czterech różnych zbieżnościach ścianek stożka ($n = 1$, $n = 4/3$, $n = 2$, $n = 4$). Im niższa wartość wskaźnika, tym mniejsze różnice pomiędzy krzywymi.

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left[\sum_{j=1}^8 \left(-u_{MES} \right)^2 \right]} \quad (20)$$

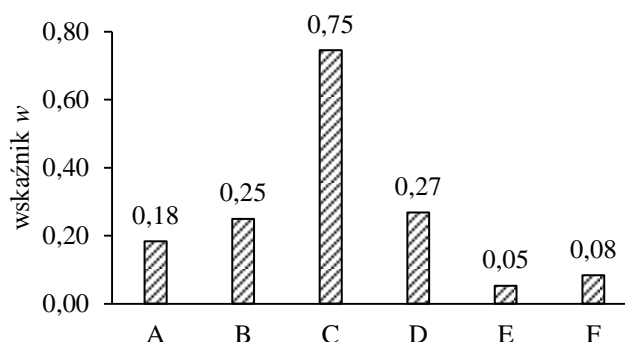


Rys. 5. Linie ugięcia belek wspornikowych: a) przy obciążeniu siłą skupioną na swobodnym końcu, b) przy obciążeniu ciągłym stałym, c) przy obciążeniu ciągłym liniowo zmiennym

Fig. 5. Bending lines of cantilever beams: a) by concentrated load on the free end, b) uniformly loaded, c) by linear variable continuous load

Wskaźnik podobieństwa dla różnych krzywych ugięcia porównano na rys. 6. Linie ugięcia określone funkcją trygonometryczną i zależnością kwadra-

ową lub sześcienną są niezależne od zbieżności ścianek bocznych słupa, nie mogą więc dobrze opisywać kształtu osi drgającej słupów o różnych zbieżnościach ścianek bocznych. Wskaźniki podobieństwa przyjmują dla nich wysokie wartości. Także linia ugięcia belki wspornikowej pod działaniem siły skupionej przyłożonej do swobodnego końca pręta znacznie odbiega od kształtu osi drgającej a wskaźnik podobieństwa ma niekorzystnie dużą wartość. Niską wartość wskaźnika stwierdzono dla linii ugięcia pod obciążeniem ciągłym o stałej wartości i stosunkowo niską wartość dla obciążenia ciągłego liniowo zmiennego.



Rys. 6. Wskaźniki podobieństwa dla krzywych opisanych: A) funkcją trygonometryczną według wzoru (1), B) funkcją kwadratową według (2), C) funkcją sześcienną według (3), D) linią ugięcia pod działaniem siły skupionej według wzoru (15), E) linią ugięcia przy stałym obciążeniu ciągłym według (16), F) linią ugięcia przy obciążeniu ciągłym liniowo zmiennym według (17)

Fig. 6. Similarity index for curves described with: A) trigonometric function (eq. 1), B) second-degree function (eq. 2), C) third-degree function (eq. 3), D) bending line by concentrated load on the free end according to eq. (15), E) deflection line by uniform load (eq. 16), F) deflection line by linear variable continuous load (eq. 17)

3. Wnioski

Można się spodziewać, że dobrą zgodność wyników z obliczeniami metodą elementów skończonych otrzymamy wtedy, kiedy do wyprowadzenia metodą Rayleigh'a wzoru na pierwszą częstość drgań własnych słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka przyjmiemy wychylenia osi drgającej słupa w postaci linii ugięcia pod działaniem obciążenia ciągłego o stałej wartości, jak na rysunku 3b.

Interesujące byłoby też wyprowadzenie wzorów z założeniem kształtu osi drgającego słupa w postaci linii ugięcia pod działaniem obciążenia stałego liniowo zmiennego (jak na rysunku 3c), gdyż uzyskalibyśmy wtedy możliwość obliczenia pierwszej częstości drgań własnych słupa w kształcie stożka.

Podziękowanie

Autorzy serdecznie dziękują dr. inż. Janowi Grudzińskiemu za wykonanie obliczeń w programie ANSYS.

Literatura

- [1] Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T.: Drgania układów fizycznych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008, s. 314-317.
- [2] Conway H.D., Dobil J.F.: Vibration Frequencies of Truncated-Cone and Wedge Beams, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol. 32 (4), 1965, s. 932-934.
- [3] Ece M.C., Aydogdu M. Taskin V.: Vibration of variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications (Elsevier)*, 34, 2007, s. 78-84.
- [4] Jaworski J., Boniecka M., Nycz M.: Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 8 (1-2), 2009, s. 3-20.
- [5] Jaworski J.: O pewnej metodzie obliczania pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych w kształcie wydrążonego ściętego stożka, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 9 (3), 2010, s. 3-15.
- [6] Jaworski J.: Pierwsza częstość drgań własnych słupów w kształcie wydrążonego ściętego stożka, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 12 (1), 2013, s. 37-50.
- [7] PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.

FREE VIBRATION OF TRUNCATED-CONE COLUMNS

Summary

The topic of this study is the form of deflection line in the first mode of natural transverse vibration of homogenous and elastic columns with clamped bottom and free head. The columns are shaped as truncated-cones with different inclination of lateral faces, from cylinder to cone. The first frequency of free vibration was determined by the energy method. The deflection line of a column axis during the vibration was assumed in forms of the cosine function, second-degree or third-degree function and bending line of a column axis by concentrated load acting on the free end. Resulting frequencies (or periods) were compared with these obtained using FEM (program ANSYS) and calculated according to the table Z-2-2 of the standard PN-77/B-02011. A good consistency of the deflection line of vibrated column determined using the program ANSYS with the form of a static bending line of cantilever beam by uniform load and by linear variable continuous load was observed. Assuming such forms of axis deformation during the vibration of columns in the derivation of formulas for the first natural frequency by Rayleigh's method can lead to a better accuracy of results (better accordance with the FEM).

Keywords: steel column, bending line, first natural frequency

DOI:10.7862/rb.2014.27

Przesłano do redakcji: 28.04.2014 r.

Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.