

Danuta BRYJA¹
Ryszard HOŁUBOWSKI²

WPŁYW DUŻYCH PRĘDKOŚCI W ANALIZIE STOCHASTYCZNYCH DRGAŃ MOSTU KOLEJOWEGO Z LOSOWO ZMIENNĄ SZTYWNOŚCIĄ PODSYPKI

Przedmiotem pracy jest analiza drgań belkowego mostu kolejowego z nawierzchnią podsypkową, obciążonego przejazdami pociągu z dużymi prędkościami. W analizie uwzględniono losowe zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego. Przedstawiono dynamiczny model pociągu, składający się z pojazdów szynowych o 6 stopniach swobody i wyprowadzono równania drgań układu: dźwigar mostowy – nawierzchnia podsypkowa – pociąg. Stosując metodę Monte Carlo wyznaczono przebiegi czasowe wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych, do-tyczących przemieszczeń i przyspieszeń drgań. Przedstawiono wykresy ilustrujące zależność maksymalnych wartości badanych charakterystyk probabilistycznych od prędkości pociągów. Na podstawie analizy wyników obliczeń sformułowano wnioski dotyczące oceny wpływu dużych prędkości na: a) wartości oczekiwane ugięć i przyspieszeń toru i dźwigara, b) odchylenia standardowe jako miary rozrzutu drgań, spowodowanego losowymi zmianami sztywności podsypki.

Słowa kluczowe: mosty kolejowe, drgania losowe, symulacje Monte Carlo, charakterystyki probabilistyczne, analiza przemieszczeń, analiza przyspieszeń

1. Wprowadzenie

Obecnie obserwuje się na świecie intensywny rozwój sieci szybkich połączeń kolejowych. W wielu krajach są rozbudowywane trasy kolejowe przystosowane do dużych prędkości, budowane są linie nowe i modernizowane są linie istniejące. Także w Polsce są opracowywane plany budowy Kolei Dużych Prędkości. Najnowsza koncepcja KDP w Polsce przewiduje budowę tzw. linii Y,

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Danuta Bryja, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wroclawska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. (71) 320 2332, e-mail: danuta.bryja@pwr.edu.pl

² Ryszard Hołubowski, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wroclawska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. (71) 320 4899, e-mail: ryszard.holubowski@pwr.edu.pl

czyli trasy kolejowej, która połączy Warszawę, Łódź, Poznań i Wrocław, zapewniając rozwinięcie prędkości ok. 300 km/h.

Zwiększenie prędkości taboru szynowego powoduje wzrost dynamicznych oddziaływań pojazdów na nawierzchnie kolejowe oraz obiekty inżynierskie, w tym mosty kolejowe [11], co jest niekorzystne z punktu widzenia trwałości konstrukcji, komfortu jazdy a nawet bezpieczeństwa użytkownika. Stąd, duże znaczenie mają badania umożliwiające prognozę i ocenę drgań w kontekście dużych prędkości i wpływu różnych warunków eksploatacyjnych.

Efekty dynamiczne obciążenia ruchem kolejowym w dużym stopniu zależą od nieregularności nawierzchni kolejowej, geometrycznych i materiałowych, które pojawiają się w trakcie eksploatacji – nawet na liniach dużych prędkości o wysokim standardzie technicznym [8]. W literaturze można znaleźć wiele publikacji, w których autorzy uwzględniają nierówności geometryczne szyn w analizie drgań mostów kolejowych (np. [2], [12]), natomiast efekty spowodowane zmiennością cech podsypki tłuczniowej są zazwyczaj pomijane. To podejście nie wydaje się właściwe, jeśli weźmiemy pod uwagę wyniki analiz drgań toru podsypkowego położonego na podtorzu gruntowym [1]. Według Dahlberga [8], zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego mogą znacząco wpływać na oddziaływania dynamiczne między pojazdem i torem, a ich wpływ jest podobny do wpływu nierówności szyn.

Wobec powyższego, efekty zmian sztywności podsypki nie powinny być pomijane a priori w analizie drgań mostów kolejowych, szczególnie w przypadku ruchu pociągów z dużymi prędkościami. Stąd, jako cel niniejszej pracy przyjęto ocenę tych efektów w zależności od prędkości ruchu pociągów. Zagadnienie będzie rozważane w ujęciu losowym, przy założeniu, że zmiany sztywności podsypki występujące na liniach dużych prędkości są niewielkie, przypadkowe, spowodowane działaniem wielu różnych niezależnych czynników, takich jak np. wpływy eksploatacyjne, środowiskowe, zabiegi utrzymaniowe, nierównomierne zagęszczenie. Badane będą przemieszczenia dynamiczne i przyspieszenia drgań mostu z nawierzchnią podsypkową, w której sztywność podsypki oscyluje losowo na długości toru, wokół stałej wartości średniej. Zmiany sztywności podsypki będą opisane funkcją losową o zadanej autokorelacji, zależną od zmiennej przestrzennej mierzonej wzdłuż osi toru [5]. Wpływ zmian sztywności będzie oszacowany na podstawie analizy charakterystyk probabilistycznych drgań spowodowanych przejazdem pociągu z dużymi prędkościami.

Wzięto pod uwagę fakt, że drgania mostu są niestacjonarnymi procesami stochastycznymi, które wyznacza się na podstawie rozwiązania równań ruchu o zmiennych współczynnikach. Stąd, do wyznaczenia badanych charakterystyk, czyli wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych, zastosowano metodę symulacyjną Monte Carlo. W analizach numerycznych wykorzystano metodykę i wnioski z wcześniejszych badań autorów, opisanych w publikacjach [4]-[7]. Badania te wykazały między innymi, że odchylenia standardowe drgań, szczególnie przyspieszeń, istotnie zależą od sposobu modelowania pojazdu szynowe-

go [7]. W związku z tym, przyjęto do obliczeń bardziej realistyczny model obciążenia ruchem taboru kolejowego niż w pracach poprzednich, gdzie rozważano obciążenie w postaci układu ruchomych nieresorowanych mas skupionych. Rozbudowano wcześniej stosowany model obliczeniowy mostu kolejowego poprzez wprowadzenie dodatkowego podukładu dynamicznego o własnych stopniach swobody, który reprezentuje pojazd szynowy.

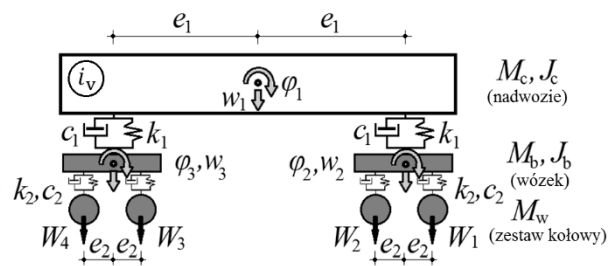
2. Model obliczeniowy układu most – tor – pociąg

2.1. Dynamiczny model pociągu

W pracy przyjęto powszechnie stosowany w literaturze model dynamiczny pociągu, w postaci zespołu N_v powtarzalnych pojazdów (jednostek napędowych) na dwuosiowych wózkach jezdnych z dwustopniowym układem zawieszenia (por. [3]). Założono, że każdy pojazd składa się z nadwozia, dwóch wózków jezdnych oraz czterech zestawów kołowych, połączonych ze sobą układem więzi sprężysto-tłumiących modelujących pierwszy i drugi stopień zawieszenia – rys. 1. Nadwozie oraz dwa wózki jezdne są traktowane jako sztywne tarcze masyowe, posiadające dwa niezależne dynamiczne stopnie swobody: przemieszczenie pionowe w_i oraz obrót φ_i , gdzie $i = 1, 2, 3$. Masy i centralne biegunowe momenty bezwładności masy nadwozia i wózków jezdnych oznaczono kolejno symbolami: M_c, J_c oraz M_b, J_b . Parametry sztywności i tłumienia zawiesznień wynoszą odpowiednio: k_1, c_1 oraz k_2, c_2 .

Przyjęto, że zestawy kołowe o masie M_w pozostają w pełnym kontakcie z szyną podczas ruchu pociągu, stąd ich pionowe przemieszczenia $W_1 \dots W_4$ są równocześnie ugięciami szyny w punktach kontaktu. W ten sposób, drgania każdego pojazdu są opisane przez 6 wewnętrznych stopni swobody zebranych w wektorze \mathbf{w}_v oraz 4 przemieszczenia pionowe szyny śledzące położenie osi zestawów kołowych, zebrane w wektorze \mathbf{W}_v , gdzie

$$\mathbf{w}_v = [w_1, w_2, w_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T, \quad \mathbf{W}_v = [W_1, W_2, W_3, W_4]^T \quad (1)$$



Rys. 1. Dynamiczny model pojazdu szynowego

Fig. 1. Dynamic model of a single vehicle

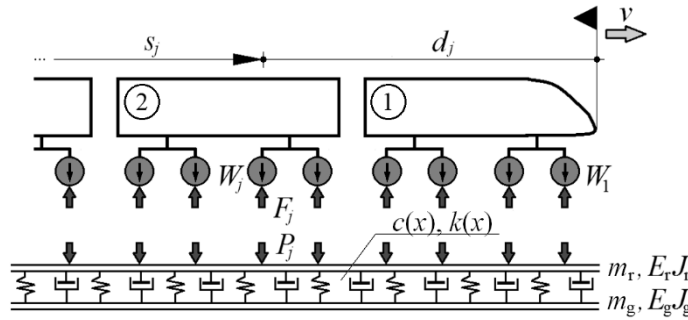
Po sporządzeniu bilansu energetycznego i wykorzystaniu równań Lagrange'a otrzymuje się równanie drgań pojazdu, które można zapisać w następującej postaci ogólnej

$$\mathbf{B}_v \ddot{\mathbf{w}}_{i_v} + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{w}}_{i_v} + \mathbf{K}_v \mathbf{w}_{i_v} = \mathbf{F}_{i_v}, \quad \text{gdzie } \mathbf{w}_{i_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_v \\ \mathbf{W}_v \end{bmatrix}_{i_v} \quad (2)$$

Indeks „ i_v ” oznacza numer pojazdu liczony od czoła pociągu (por. rys. 2). Macierze: bezwładności \mathbf{B}_v , tłumienia \mathbf{C}_v i sztywności \mathbf{K}_v mają wymiar 10×10 i są jednakowe dla wszystkich pojazdów. Wektor sił wzbudzających o wymiarze 10×1 jest wektorem blokowym o postaci

$$\mathbf{F}_{i_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ -\mathbf{F}_v \end{bmatrix}_{i_v}, \quad \text{gdzie } \mathbf{F}_v = [F_1(t), F_2(t), F_3(t), F_4(t)]^T \quad (3)$$

Siły $F_1(t) \dots F_4(t)$ są dynamicznymi oddziaływaniami toru na zestawy kołowe. Dodatkowo zwroty sił pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Ogólny model pociągu i mostu oraz ich wzajemne oddziaływania
Fig. 2. General model of the train and bridge and their interactions

Równania (2) dotyczące kolejnych pojazdów $i_v = 1, 2, \dots, N_v$ zapisano dalej w sposób łączny tworząc wektory $\mathbf{w}_t = \text{col}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N_v})$, $\mathbf{F}_t = \text{col}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_v})$ i macierze blokowo-diagonalne typu $\mathbf{B}_t = \text{diag}((\mathbf{B}_v)_1, \dots, (\mathbf{B}_v)_{N_v})$. Symbol „col” oznacza tu macierz kolumnową (wektor). Następnie zmieniono uporządkowanie równań, grupując równania związane z wewnętrznymi stopniami swobody kolejnych pojazdów. Przemieszczenia odpowiadające wewnętrznym stopniom swobody zestawiono w wektor $\mathbf{w}_T = \text{col}((\mathbf{w}_v)_1, \dots, (\mathbf{w}_v)_{N_v})$, który zawiera $6N_v$ elementów. Pozostałe równania tworzą drugą grupę związaną z przemieszczeniami zestawów kołowych, które tworzą wektor zawierający $4N_v$ elementów: $\mathbf{w}_R = \text{col}((\mathbf{W}_v)_1, \dots, (\mathbf{W}_v)_{N_v})$.

Zmianę uporządkowania równań zrealizowano przez podstawienie relacji $\mathbf{w}_t = \mathbf{A}_t \text{col}(\mathbf{w}_T, \mathbf{w}_R)$ do układu zblokowanych równań (2), gdzie \mathbf{A}_t jest macierzą przekształcenia polegającego na zmianie uporządkowania przemieszczeń. Po lewostronnym pomnożeniu przez macierz \mathbf{A}_t^T , otrzymuje się finalną postać równań opisujących drgania całego składu pociągu, z podziałem na dwie sprzężone grupy według wcześniej opisanego schematu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{TT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{w}}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \mathbf{C}_{TR} \\ \mathbf{C}_{RT} & \mathbf{C}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_T \\ \dot{\mathbf{w}}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{TR} \\ \mathbf{K}_{RT} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_T \\ \mathbf{w}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Warto zauważyć, że macierze \mathbf{B}_{RR} , \mathbf{C}_{RR} i \mathbf{K}_{RR} są diagonalne. Ponadto, kolejne przemieszczenia zestawów kołowych, zawarte w wektorze \mathbf{w}_R , są równocześnie ugięciami dynamicznymi szyny w punktach kontaktu, w chwili t .

Rozwinięcie równania (4) według pierwszego wiersza i przeniesienie na prawą stronę wyrazów zawierających człony sprzęgające prowadzi do równania

$$\mathbf{B}_{TT}\ddot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{C}_{TT}\dot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{K}_{TT}\mathbf{w}_T = -(\mathbf{C}_{TR}\dot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{K}_{TR}\mathbf{w}_R) = \mathbf{F}_T \quad (5)$$

które opisuje drgania pociągu wzbudzone kinematycznie drganiami szyn. Wynikiem rozwinięcia według drugiego wiersza jest natomiast formuła

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{C}_{RT}\dot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{K}_{RT}\mathbf{w}_T) - (\mathbf{B}_{RR}\ddot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{C}_{RR}\dot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{K}_{RR}\mathbf{w}_R) \quad (6)$$

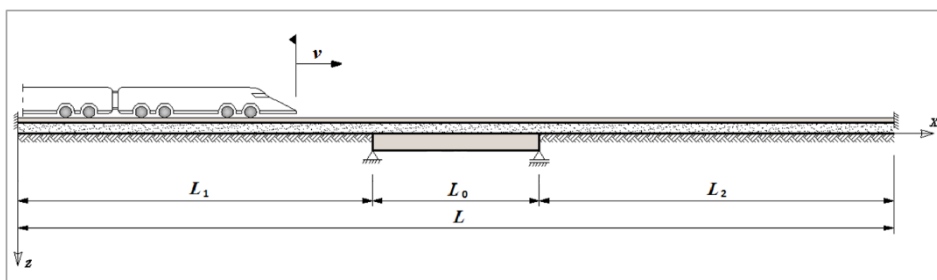
która określa dynamiczne oddziaływania szyny na zestawy kołowe: $F_j(t)$, gdzie $j = 1, \dots, N$ oraz $N = 4N_v$. Według zasady oddziaływań wzajemnych, są to równocześnie dynamiczne naciski zestawów kołowych na szynę, przy czym całkowite siły nacisku $P_j(t) = G_j + F_j(t)$, pokazane na rys.2, składają się z nacisków statycznych $G_j = (0,25M_c + 0,5M_b + M_w)g$ oraz dynamicznych $F_j(t)$.

2.2. Równania ruchu układu most – tor – pociąg

W pracy [4] autorzy przedstawili oryginalny, płaski model obliczeniowy układu: dźwigar mostowy – tor podsypkowy, którego obciążeniem jest zbiór ruchomych, nieresorowanych mas skupionych. Model ten wykorzystamy do sformułowania równań ruchu układu złożonego z trzech sprzężonych podukładów: dźwigara mostowego, toru podsypkowego i pociągu. Schemat rozważanego układu jest pokazany na rys. 3.

Kluczową ideą modelu opisanego szczegółowo w pracy [4] jest założenie, że warstwa podsypki stanowi ciągłe, nieinercyjne podłoże sprężysto-tłumiące typu Winklera, o charakterystykach liniowych $k(x)$ i $c(x)$ zmiennych na długości toru. Uwzględniono strefy dojazdowe, usytuowane przed i za przeprawą mostową, dostatecznie długie, aby wziąć pod uwagę efekt propagacji drgań spowodowanych nadjeżdżającym pociągiem. Przyjęto zatem, że tor podsypkowy składa się z trzech odcinków: odcinka centralnego o rozpiętości L_0 – opartego na dźwigarze mostu oraz dwóch stref dojazdowych o długościach L_1 i L_2 , spoczywają-

cych na nieodkształcalnym podtorzu. Równania ruchu dźwigara mostowego i trzech odcinków toru wyprowadzono metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkinia, przy czym zarówno dźwigar jak i zespół dwóch szyn tworzących tor potraktowano jako pryzmatyczne belki Eulera z ciągłym rozkładem masy. Wyprowadzone równania ruchu połączone za pomocą tzw. techniki podstruktur, opisanej przez Biondiego [3].



Rys. 3. Schemat układu: most – tor – pociąg z uwzględnieniem stref dojazdowych
Fig. 3. A bridge – track – train system and two approach track sections

Finalne równania ruchu zostały sformułowane w pracy [4] przy założeniu, że obciążeniem toru jest układ ruchomych, nieresorowanych mas skupionych modelujących pociąg. Skutkiem tego założenia było pojawienie się w równaniach współczynników zmiennych w czasie. Po ich pominięciu otrzymuje się układ dwóch równań macierzowych zapisanych łącznie w następującej postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rr} & -\mathbf{C}_{rg} \\ -\mathbf{C}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & -\mathbf{K}_{rg} \\ -\mathbf{K}_{gr} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Wszystkie oznaczenia użyte w równaniu (7), z wyłączeniem wektora \mathbf{F}_r , są zdefiniowane w pracy [4]. Nadpisane kropki oznaczają pochodne po czasie, indeks „g” odnosi się do dźwigara mostowego, indeks „r” oznacza tor (zespół dwóch szyn). Równania (7) stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań.

Wektor \mathbf{F}_r , który reprezentuje obciążenie toru przejazdem pociągu, wymaga szczegółowego zdefiniowania. Znana jest ogólna formuła jego agregacji ([4])

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_i^T \left(\sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_{ki}^T \mathbf{F}_{ki} \right) \quad (8)$$

na podstawie wektorów \mathbf{F}_{ki} zawierających równoważniki obciążenia działającego na k -ty element skończony, wyodrębniony w i -tej strefie toru. Indeks i określa odcinek toru: centralny $i = 0$, strefę dojazdową przed mostem $i = 1$ i strefę za przeprawą mostową $i = 2$. Symbol n_{ri} oznacza liczbę elementów, na które podzielono strefę i . Macierze \mathbf{A}_{ki} i \mathbf{A}_i realizują transformacje przemieszczeń wę-

złowych, polegające na wyborze konkretnego podzbioru i określone wzorami

$$\mathbf{W}_{ki} = \mathbf{A}_{ki} \mathbf{q}_{ri}, \quad \mathbf{q}_{ri} = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_r \quad (9)$$

gdzie: \mathbf{W}_{ki} – wektor przemieszczeń brzegowych elementu k w strefie toru i ,

\mathbf{q}_{ri} – wektor przemieszczeń węzłowych w strefie toru i ,

\mathbf{q}_r – pełny zbiór przemieszczeń węzłowych toru (trzech stref), z wyłączeniem utwierdzonych węzłów skrajnych.

Rozkład przemieszczeń na długości elementu skończonego l_{ki} jest aproksymowany typowymi sześciennymi wielomianami Hermite'a, które tworzą wektor funkcji kształtu $\mathbf{N}_{ki}(\xi)$, gdzie $\xi = (x/l)_{ki}$ i $0 \leq \xi \leq 1$, zatem

$$w_{ki}(\xi, t) = \mathbf{N}_{ki}^T(\xi) \mathbf{W}_{ki}(t) \quad (10)$$

Jak pokazano na rys. 2, tor jest obciążony zbiorem ruchomych sił skupionych $P_j(t)$, gdzie $P_j(t) = G_j + F_j(t)$. Przyjęto, że pociąg porusza się ze stałą prędkością v , wtedy położenie j -tej siły na torze w chwili t opisuje funkcja $s_j(t) = vt - d_j$, gdzie d_j oznacza odległość siły od czoła pociągu, które w chwili początkowej $t = 0$ znajduje się na początku lewej strefy dojazdowej toru.

Obciążenie k -tego elementu skończonego szyny znajdującego się w obrębie i -tego odcinka toru, mierzone na jednostkę długości, można zapisać następującym wzorem wyrażonym z użyciem funkcji delta Diraca $\delta(\cdot)$:

$$p_{ki}(x_{ki}, t) = \sum_{j=1}^N P_j(t) \delta(x_{ki} - s_{ki}^{P_j}(t)), \quad s_{ki}^{P_j}(t) = s_j(t) - (k-1)l_{ki} - a_i \quad (11)$$

gdzie $a_0 = L_1$, $a_1 = 0$, $a_2 = L_1 + L_0$ są rozpiętościami poprzedzających odcinków toru oraz $N = 4N_v$. Wektor równoważników obciążenia ma wówczas postać

$$\mathbf{F}_{ki} = l_{ki} \int_0^1 \mathbf{N}_{ki} p_{ki}(\xi, t) d\xi = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j} P_j(t) \quad (12)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j}(t) = \begin{cases} \mathbf{N}_{ki}[\xi_{ki}^{P_j}(t)] & \text{gdy } \xi_{ki}^{P_j} \in (0;1] \\ 0 & \text{gdy } \xi_{ki}^{P_j} \notin (0;1] \end{cases} \quad (13)$$

jest wektorem funkcji kształtu o argumentie $\xi_{ki}^{P_j} = s_{ki}^{P_j}(t)/l_{ki}$, zależnym od czasu, śledzącym położenie siły $P_j(t)$ względem danego elementu skończonego. Zestawiając naciski zestawów kołowych pociągu w wektorach: \mathbf{G} (naciski statyczne G_j), \mathbf{F} (naciski dynamiczne $F_j(t)$) i \mathbf{P} (naciski łączne $P_j(t)$), oraz wektory funkcji kształtu (13) w kolumnach macierzy $\tilde{\mathbf{N}}_{ki}$, w uporządkowaniu od $j = 1$ do

$j = N$, otrzymujemy na podstawie wzoru (12)

$$\mathbf{F}_{ki} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} (\mathbf{G} + \mathbf{F}), \text{ gdzie } \tilde{\mathbf{N}}_{ki} = [\tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_1} \quad \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_2} \quad \dots] \quad (14)$$

Dynamiczne naciski zestawów kołowych $\mathbf{F}(t)$ są określone wzorem (6), w którym występują przemieszczenia zestawów kołowych $W_j(t)$ zebrane w wektorze \mathbf{w}_R , a także ich prędkości i przyspieszenia. Przemieszczenia zestawów kołowych są równe ugięciom szyny śledzącym położenie sił $P_j(t)$, mamy zatem

$$W_j(t) = w_{ki}[\xi_{ki}^{P_j}(t), t] = \mathbf{N}_{ki}^T[\xi_{ki}^{P_j}(t)] \mathbf{W}_{ki}(t) \quad (15)$$

jeśli siła P_j znajduje się na k -tym elemencie w i -tej strefie toru. Uwzględniając definicję (13) otrzymujemy po wykonaniu obliczeń

$$\mathbf{w}_R = \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{W}_{ki}, \quad \dot{\mathbf{w}}_R = \frac{v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T \mathbf{W}_{ki} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} \quad (16)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_R = \frac{v^2}{l_{ki}^2} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}''^T \mathbf{W}_{ki} + \frac{2v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \ddot{\mathbf{W}}_{ki} \quad (17)$$

gdzie $(\cdot)' = d/d\xi$. Podstawienie zależności (16) i (17) do wzoru (6), a następnie wzoru (6) do (14) daje wynik

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{ki} = & \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G} - \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RT} \dot{\mathbf{w}}_T - \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RT} \mathbf{w}_T - \\ & \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \ddot{\mathbf{W}}_{ki} - \left(\frac{2v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}' \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \dot{\mathbf{W}}_{ki} - \\ & \left(\frac{v^2}{l_{ki}^2} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'' \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}''^T + \frac{v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}' \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{W}_{ki} \end{aligned} \quad (18)$$

który na podstawie (8) i (9) prowadzi do następującej, ostatecznej postaci wektora obciążenia toru

$$\mathbf{F}_T = \tilde{\mathbf{F}}_T - \tilde{\mathbf{C}}_{rT} \dot{\mathbf{w}}_T - \tilde{\mathbf{K}}_{rT} \mathbf{w}_T - \tilde{\mathbf{B}}_{rr} \ddot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{rr} \dot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{K}}_{rr} \mathbf{q}_r \quad (19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_T = & \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{rT} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RT}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rT} = & \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RT}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{rr} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}_{rr} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \left(\frac{2v}{l_{ki}} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rr} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \left(\frac{v^2}{l_{ki}^2} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{K}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i.\end{aligned}$$

Zdefiniowany w równaniu (5) wektor wymuszenia kinematycznego drgań pociągu, po podstawieniu zależności (16) i zsumowaniu po wszystkich elementach szyny, przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_T = - \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{C}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} - \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \left(\frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{K}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{W}_{ki} \quad (20)$$

którą po uwzględnieniu relacji (9) zapisano ostatecznie w formie

$$\mathbf{F}_T = -\tilde{\mathbf{C}}_{Tr} \dot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{K}}_{Tr} \mathbf{q}_r \quad (21)$$

w której wprowadzono oznaczenia

$$\tilde{\mathbf{K}}_{Tr} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \left(\frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{K}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{Tr} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{C}_{TR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i.$$

Drgania sprzężonego układu dźwigar mostowy – tor podsypkowy – pociąg są ostatecznie opisane układem trzech równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{TT} \ddot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{C}_{TT} \dot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{K}_{TT} \mathbf{w}_T &= \mathbf{F}_T \\ \mathbf{B}_{rr} \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_{rr} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{q}_r - \mathbf{C}_{rg} \dot{\mathbf{q}}_g - \mathbf{K}_{rg} \mathbf{q}_g &= \mathbf{F}_r \\ \mathbf{B}_{gg} \ddot{\mathbf{q}}_g + \mathbf{C}_{gg} \dot{\mathbf{q}}_g + \mathbf{K}_{gg} \mathbf{q}_g - \mathbf{C}_{gr} \dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{K}_{gr} \mathbf{q}_r &= \mathbf{0}\end{aligned} \quad (22)$$

na które składa się równanie (5) opisujące drgania pociągu, wzbudzone kinematycznie drganiami toru, oraz równania drgań toru i dźwigara mostowego (7). Po podstawieniu formuł (19) i (21) do równań (22) i przeniesieniu na lewą stronę składników, które zależą od przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń drgań, układ równań (22) można zapisać w następującej postaci, dogodnej do bezpośredniego całkowania numerycznego:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{TT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rr} + \tilde{\mathbf{B}}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \tilde{\mathbf{C}}_{Tr} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{rT} & \mathbf{C}_{rr} + \tilde{\mathbf{C}}_{rr} & -\mathbf{C}_{rg} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_T \\ \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \tilde{\mathbf{K}}_{Tr} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rT} & \mathbf{K}_{rr} + \tilde{\mathbf{K}}_{rr} & -\mathbf{K}_{rg} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{gr} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_T \\ \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (23)$$

W równaniach (23) ujawniają się sprzężenia drgań rozważanego układu. Sprzężenie drgań pociągu i toru kolejowego jest konsekwencją założenia, że przemieszczenia pionowe zestawów kołowych pojazdu są jednocześnie ugięciami szyny w punktach styku, natomiast za sprzężenie drgań toru i dźwigara mostowego odpowiedzialna jest warstwa podsypki tłuczniowej.

2.3. Symulacja losowych zmian sztywności podsypki

Warstwa podsypki w przyjętym modelu obliczeniowym mostu kolejowego stanowi podłoże sprężysto-tłumiące typu Winklera, o zmiennych parametrach $k(x)$ i $c(x)$. Jak pokazano w pracach [5] i [6], to założenie umożliwia wprowadzenie do modelu obliczeniowego funkcji losowej, która opisuje niewielkie, przypadkowe zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego, możliwe na liniach dużych prędkości. Przyjęto, że sztywność podsypki $k(x) = \bar{k} + \tilde{k}(x)$ jest sumą stałej wartości średniej \bar{k} i losowej fluktuacji $\tilde{k}(x)$ o zerowej wartości oczekiwanej i znanej funkcji korelacyjnej. Biorąc pod uwagę fakt, że zmiany sztywności podsypki wynikają z działania wielu niezależnych czynników, założono zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, że fluktuacja sztywności wokół wartości średniej stanowi stacjonarny proces Gaussa. Symulacje numeryczne takiego procesu można stosunkowo łatwo przeprowadzić wykorzystując znaną w literaturze aproksymację spektralną procesu stacjonarnego (por. [4], [6]), pod warunkiem, że znana jest funkcja gęstości widmowej procesu.

W niniejszej pracy przyjęto funkcję gęstości widmowej o postaci

$$S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega) = \frac{\sigma_k^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2 + \theta^2}{(\alpha^2 - \omega^2 + \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \quad (24)$$

która odpowiada dwuparametrowej funkcji korelacyjnej

$$K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\zeta) = \sigma_k^2 e^{(-\alpha|\zeta|)} \cos(\theta\zeta) \quad (25)$$

pulsującej harmonicznie z częstością θ [rad/m] i zanikającej wykładniczo wraz ze wzrostem odległości $\zeta = x_1 - x_2$ między dwoma punktami x_1, x_2 położonymi

na osi toru kolejowego. Parametr $\alpha > 0$ odpowiada za szybkość zanikania korelacji, symbol $\sigma_k^2 = K_{\tilde{k}\tilde{k}}(0)$ oznacza wariancję procesu.

Funkcja gęstości widmowej (24) osiąga maksymalne wartości w otoczeniu częstości $\theta = 2\pi/T_\theta$, gdzie T_θ oznacza dominującą długość fali procesu $\tilde{k}(x)$, który opisuje zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru. W dalszych analizach za T_θ będzie podstawiany osiowy rozstaw podkładów, co oznacza przyjęcie założenia, że zasadnicze zmiany sztywności podsypki zachodzą cyklicznie, z częstością odpowiadającą rozstawowi podkładów kolejowych. To założenie, zgodne z intuicją inżynierską, zostało potwierdzone doświadczalnie. Wyniki badań eksperymentalnych, opublikowane przez Dahlberga w pracy [8], wskazują bowiem jednoznacznie na występowanie pewnej charakterystycznej częstości zmian sztywności toru kolejowego, wynikającej z istnienia podkładów.

3. Badania numeryczne

3.1. Charakterystyki probabilistyczne drgań mostu

Do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań zastosowano metodę symulacyjną Monte Carlo. Symulację numeryczną stacjonarnego procesu Gaussa, opisującego zmiany sztywności podsypki, przeprowadzono stosując wspomnianą wcześniej aproksymację spektralną procesu, określoną wzorami

$$\tilde{k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N_\omega} a_n \cos(\omega_n x + \varphi_n), \quad a_n = \sqrt{2S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega_n)\Delta\omega} \quad (26)$$

podanymi między innymi w monografii Sobczyka i Spencera [10]. Przesunięcia fazowe φ_n we wzorze (26) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym w przedziale od 0 do 2π , z gęstością $1/2\pi$. Amplitudy a_n oraz częstości $\omega_n = \omega_l + (n - 0,5)\Delta\omega$ [rad/m] składowych harmonicznym szeregu (26) są powiązane z liczbą wyrazów szeregu N_ω , która dzieli przedział częstości (ω_l, ω_u) na odcinki $\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N_\omega$, gdzie ω_l i ω_u określają dolną i górną granicę przedziału częstości uznanego za istotny.

Każdej symulacji procesu zmian sztywności podsypki, obliczonej według wzoru (26), odpowiada konkretna realizacja drgań mostu, spowodowanych przejazdem pociągu. Po wykonaniu N symulacji, związanych każdorazowo z numerycznym wyznaczeniem przebiegów drgań, otrzymuje się zbiór realizacji drgań losowych. Na ich podstawie można wyznaczyć charakterystyki probabilistyczne drgań – zmienne w czasie, ponieważ drgania mostu są niestacjonarnymi procesami stochastycznymi. W niniejszej pracy ograniczono obliczenia do wartości oczekiwanych $E[\cdot]$ i wariancji $\text{Var}[\cdot]$, które w kolejnych chwilach t są określone znanymi wzorami

$$E[R(t)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i(t), \quad \text{Var}[R(t)] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i(t) - E[R(t)])^2 \quad (27)$$

gdzie $R(t)$ oznacza badany proces odpowiedzi mostu a $R_i(t)$ jego realizację. Na podstawie wariancji obliczono odchylenia standardowe $\sigma_R(t) = \text{Var}[R(t)]^{1/2}$.

3.2. Obiekt badań

Jako obiekt badań przyjęto swobodnie podparty, jednotorowy, belkowy most kolejowy o rozpiętości $L_0 = 30,0$ m. Sztywność giętna żelbetowego dźwigara mostu wynosi $E_g I_g = 1,0703358 \cdot 10^{11}$ Nm². Masę warstwy podsypki tłuczniowej oraz podkładów kolejowych wliczono do równomiernie rozłożonej masy dźwigara $m_g = 3,3147 \cdot 10^4$ kg/m. Przyjęto, że parametr tłumienia podsypki jest stały i wynosi $c(x) = c = 2,8667 \cdot 10^5$ Ns/m², natomiast sztywność podsypki zmienia się losowo wzdłuż toru oscylując wokół wartości średniej $\bar{k} = 1,1 \cdot 10^8$ N/m². Założono, że długości stref dojazdowych toru wynoszą $L_1 = L_2 = 100$ m, uznając na podstawie pracy [3], że jest to długość wystarczająca, aby w numerycznych symulacjach drgań mostu zastąpić tor nieskończenie długi. Sztywność giętna belki modelującej szyny toru kolejowego wynosi $E_r I_r = 1,2831 \cdot 10^7$ Nm² a jej masa jednostkowa $m_r = 1,21 \cdot 10^2$ kg/m. W obliczeniach uwzględniono tłumienie materiałowe w szynach z czasem retardacji $\kappa_r = 2,1 \cdot 10^{-5}$ s oraz tłumienie konstrukcyjne dźwigara z parametrem wymiarowym $\mu_g = 0,984$ s⁻¹. Drgania mostu i toru kolejowego wzbudzone są przejazdem pociągu typu Shinkansen, który składa się z ośmiu 25-metrowych powtarzalnych jednostek napędowych, z których każda zawiera dwa dwuosiowe wózki jezdne. Osiowy rozstaw wózków wynosi 17,50 m, osiowy rozstaw zestawów kołowych 2,50 m. Masa nadwozia przy maksymalnym obciążeniu użytkowym wynosi $M_c = 3,60 \cdot 10^4$ kg, masa ramy wózka jezdnego wraz z masą silników trakcyjnych $M_b = 4,95 \cdot 10^3$ kg, masa zestawu kołowego $M_w = 2,40 \cdot 10^3$ kg. Masowe biegunowe momenty bezwładności nadwozia i wózków jezdnych, obliczone względem środków masy, wynoszą odpowiednio: $J_c = 1,894 \cdot 10^6$ kg·m² i $J_b = 6,150 \cdot 10^3$ kg·m². Przyjęto następujące wartości parametrów sztywności i tłumienia zawiesznień pojazdu: $k_1 = 8,870 \cdot 10^5$ N/m, $c_1 = 4,335 \cdot 10^4$ Ns/m, $k_2 = 2,540 \cdot 10^6$ N/m, $c_2 = 1,963 \cdot 10^4$ Ns/m. Zaznaczone na rys. 1 odległości od środków ciężkości tarcz masowych do punktów zamocowania zawiesznień wynoszą: $e_1 = 8,25$ m oraz $e_2 = 1,25$ m. Wielkości opisujące model pociągu Shinkansen przyjęto na podstawie monografii [9].

3.3. Wpływ prędkości pociągu na charakterystyki probabilistyczne drgań dźwigara mostowego i toru

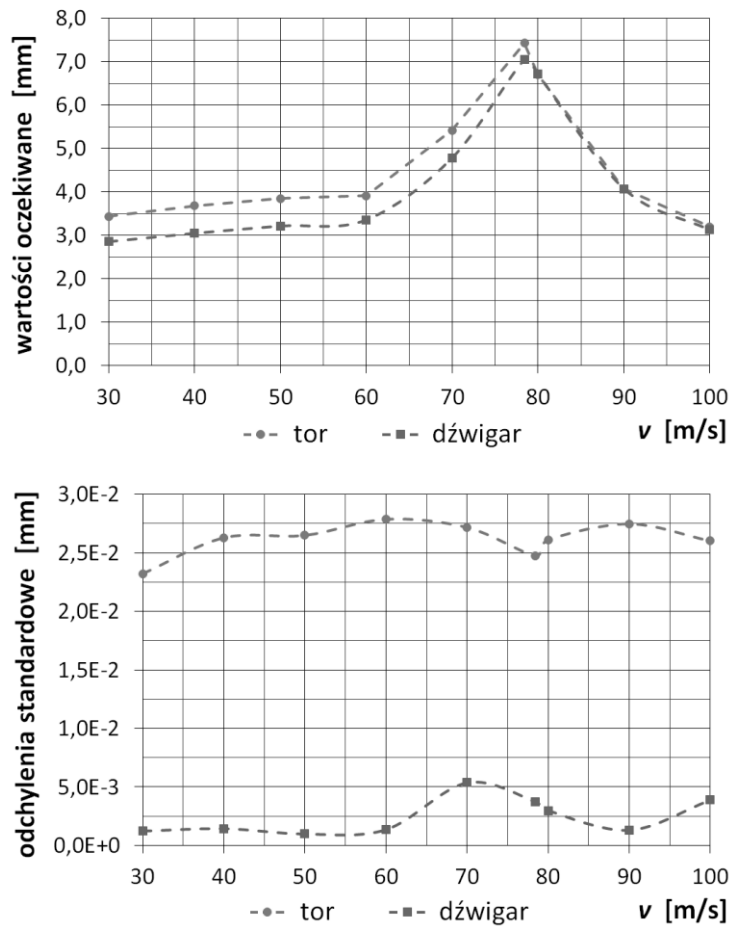
Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe odpowiedzi dynamicznej konstrukcji obliczono na podstawie 100 symulacji, zakładając, że współczynnik

zmienności sztywności podsypki $\sigma_k / \bar{k} = 0,3 = 30\%$. W obliczeniach przyjęto, że parametry funkcji korelacyjnej (25) wynoszą $\alpha = 2,0$ oraz $\theta = 10\pi/3$, przy czym wartość parametru θ odpowiada rozstawowi podkładów $T_\theta = 0,6$ m. Prędkość ruchu pociągu zmienia się co 10 m/s począwszy od 30 m/s (108 km/h) do 100 m/s (360 km/h), przy czym wyniki podano również dla pierwszej prędkości rezonansowej $v_{res} = 78,312$ m/s (281,924 km/h), obliczonej na podstawie podstawowej częstości własnej układu dźwigar – tor: $\omega_1 = 19,682$ rad/s.

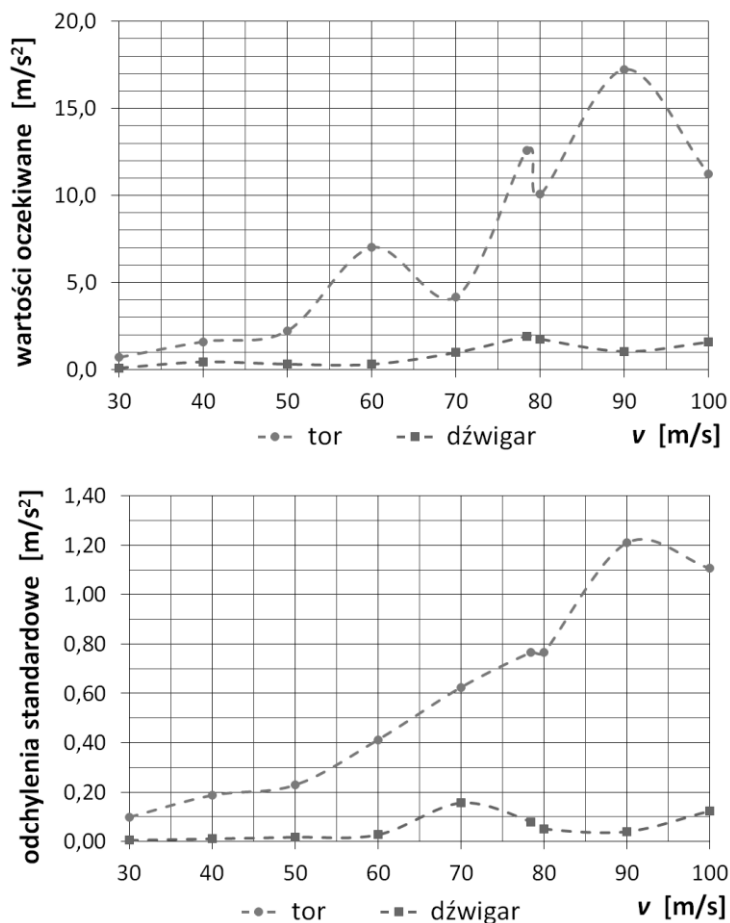
Na rys. 4 przedstawiono maksymalne wartości oczekiwane, wybrane z przebiegów czasowych, oraz maksymalne odchylenia standardowe ugięć dynamicznych dźwigara i toru kolejowego w środku rozpiętości mostu, w zależności od prędkości przejazdu pociągu. Cechą charakterystyczną wykresów wartości oczekiwanych jest znaczny wzrost przemieszczeń w strefie prędkości rezonansowej. Przemieszczenia zaczynają narastać już po przekroczeniu około 60 m/s (216 km/h), osiągają maksimum dla prędkości rezonansowej, potem maleją do poprzedniego poziomu, osiągając go przy prędkości około 90 m/s (324 km/h). Strefa zwiększonych ugięć dynamicznych obejmuje więc dość szeroki zakres dużych prędkości: od 60 do 90 m/s. Poza tą strefą wartości oczekiwane ugięć utrzymują się w przybliżeniu na stałym poziomie i wynoszą w przypadku dźwigara od 2,9 do 3,4 mm, w torze od 3,2 do 3,9 mm. Prędkości rezonansowej odpowiadają dwukrotnie większe wartości oczekiwane ugięć.

Można zauważyć, że po przekroczeniu prędkości rezonansowej wartości oczekiwane ugięć dynamicznych szyny i dźwigara praktycznie się zrównują. To oznacza, że efektem bardzo dużych prędkości jest między innymi znaczne zwiększenie dynamicznej sztywności warstwy sprężystej, łączącej tor z dźwigarem, co skutkuje dużym wzrostem przyspieszeń drgań toru. Efekt ten jest widoczny na rys. 5, gdzie pokazano wyniki analogiczne do przedstawionych na rys. 4, ale dotyczące przyspieszeń. Wartości oczekiwane przyspieszeń drgań toru rosną znacznie ze wzrostem prędkości przejazdu pociągu, w przeciwieństwie do przyspieszeń dźwigara mostowego, które utrzymują się na stosunkowo niskim poziomie od 0,5 do 1,5 m/s², z lokalnym maksimum 2 m/s² w strefie prędkości rezonansowej. Wzrost przyspieszeń toru nie jest monotoniczny, widoczne są lokalne ekstrema: przy prędkości jazdy pociągu 60 m/s – 7 m/s², przy prędkości rezonansowej $v_{res} = 78,312$ m/s – prawie 13 m/s², oraz przy prędkości 90 m/s – ponad 17 m/s². Są to wartości bardzo duże w porównaniu z wartościami granicznymi, określonymi w załączniku A2 do PN-EN 1990 [13], gdzie podano, że pionowe przyspieszenie nadwozia pojazdu nie powinno przekraczać 1,0 m/s² przy bardzo dobrym poziomie komfortu jazdy, 1,3 m/s² przy dobrym i 2,0 m/s² przy dostatecznym. Stąd wynika wniosek, że przy dużych prędkościach pociągów bardzo duże znaczenie ma odpowiedni dobór parametrów zawieszenia pojazdów szynowych, aby wyłumić drgania toru przekazywane na nadwozie pojazdu i zapewnić właściwy komfort jazdy. W tym celu należy przeprowadzić dokładniejszą analizę drgań, w tym drgań pojazdu, z uszczegółowieniem modelu

obliczeniowego pociągu, w którym powinna być uwzględniona możliwość chwilowego odrywania się kół pojazdu od toru, np. przez wprowadzenie więzi kontaktowych typu Hertza [9]).



Rys. 4. Maksymalne wartości oczekiwane i maksymalne odchylenia standardowe przemieszczeń dźwigara i toru w środku rozpiętości mostu
 Fig. 4. Maximum expected values and maximum standard deviations of girder and track displacements at the bridge mid-span



Rys. 5. Maksymalne wartości oczekiwane i maksymalne odchylenia standardowe przyspieszeń drgań dźwigara i toru w środku rozpiętości mostu

Fig. 5. Maximum expected values and maximum standard deviations of girder and track accelerations at the bridge mid-span

Miarą wpływu nieregularności cech sprężystych podsypki na drgania dźwigara mostowego i szyn są odchylenia standardowe, które informują o tym, jaki jest rozrzut badanej odpowiedzi konstrukcji, spowodowany losową zmiennością sztywności podsypki. Jak wynika z rys. 4, rozrzut ugięć dynamicznych dźwigara i toru jest bardzo niewielki, pomijalnie mały z inżynierskiego punktu widzenia – odchylenia standardowe są wielokrotnie mniejsze od wartości oczekiwanych i nie wykazują stałej tendencji wzrostowej ze wzrostem prędkości przejazdu pociągu. Trzeba podkreślić, że wpływ zmian sztywności podsypki na ugięcia dynamiczne konstrukcji okazał się pomijalnie mały pomimo tego, że współczynnik

zmienności sztywności względem wartości średniej założono na dość wysokim poziomie 30%.

Z rys. 5 wynika natomiast, że założone, losowe zmiany sztywności podsypki mają widoczny wpływ na przyspieszenia drgań, jednak w przypadku dźwigara mostowego wpływ ten nie jest duży. Największe maksymalne odchylenie standardowe przyspieszeń, pojawiające się przy prędkości pociągu 70 m/s, wynosi około $0,17 \text{ m/s}^2$, co stanowi 17% maksymalnej wartości oczekiwanej przyspieszenia, wyznaczonej przy tej prędkości. Rozrzut przyspieszeń rzędu 17% wydaje się znaczący, jednak biorąc pod uwagę fakt, że wartości oczekiwane są stosunkowo małe, można stwierdzić, że zmiany sztywności podsypki nie mają dużego wpływu na przyspieszenia dźwigara, nawet przy dużych prędkościach ruchu pociągu.

W przypadku toru, odchylenia standardowe przyspieszeń szybko rosną wraz ze wzrostem prędkości pociągu. Należy jednak zauważyć, że równocześnie rosną wartości oczekiwane, dlatego największa wartość maksymalna odchylenia standardowego, występująca przy prędkości 90 m/s, stanowi tylko około 7% odpowiedniej wartości oczekiwanej. Przy prędkości 70 m/s otrzymujemy wartość 15%. Choć rozrzut przyspieszeń drgań toru generalnie nie jest duży w porównaniu z wartościami oczekiwany, to jednak przy dużych prędkościach jego wartość może przekraczać 1 m/s^2 . Uwzględnienie zmian sztywności podsypki może mieć zatem istotne znaczenie w ocenie komfortu jazdy a także niezawodności zmęczeniowej szyn. W ujęciu stochastycznym problemu niezawodności niezbędne jest bowiem wyznaczenie częstotliwości występowania pików naprężeń, która zależy od przyspieszeń zmian naprężeń w materiale [10], a te z kolei są bezpośrednio związane z przyspieszeniami drgań.

4. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano efektywną metodę wyznaczania charakterystyk probabilistycznych drgań układu dźwigar mostowy – tor – pociąg, z nawierzchnią podsypkową o losowo zmiennej sztywności. Przeprowadzono analizy numeryczne dla różnych prędkości przejazdu pociągu, z uwzględnieniem prędkości rezonansowej. Przy założonym, średnim poziomie zmian sztywności podsypki tłuczniowej (30%), uzyskano wyniki pozwalające sformułować następujące wnioski:

- Duże prędkości, przekraczające 60 m/s, mają istotny wpływ na wartości oczekiwane ugięć dynamicznych dźwigara mostowego i toru kolejowego a także na wartości oczekiwane przyspieszeń toru. Nie wpływają natomiast znacząco na wartości oczekiwane przyspieszeń dźwigara.
- W obszarze dużych prędkości pojawia się rozległa strefa rezonansowa, w której następuje znaczny wzrost wartości oczekiwanych ugięć dźwigara i toru – dwukrotny w badanym obiekcie, przy prędkości rezonansowej.

- Efektem bardzo dużych prędkości, większych od prędkości rezonansowej, jest zjawisko „uszywnienia” warstwy sprężystej w nawierzchni kolejowej, którego skutkiem są bardzo duże wartości oczekiwane przyspieszeń toru.
- Duże prędkości nie powodują istotnego zwiększenia efektów dynamicznych spowodowanych nieregularnościami cech sprężystych podsypki, które skutkują losową zmiennością jej sztywności.
- Wpływ losowych zmian sztywności podsypki na ugięcia dynamiczne dźwigara i toru jest przy dużych prędkościach nadal pomijalnie mały a wpływ na przyspieszenia drgań jest znaczący, może być rzędu kilkunastu procent.
- W przypadku dźwigara, kilkunastoprocentowy rozrzut przyspieszeń nie ma znaczenia z punktu widzenia inżynierskiego, ponieważ przyspieszenia są małe. Natomiast w torze kolejowym, w którym przyspieszenia drgań są bardzo duże w strefie dużych prędkości, analogiczny rozrzut może mieć istotny wpływ na ocenę trwałości toru w aspekcie zmęczenia materiału.

Podsumowując zaprezentowane wyniki analiz należy stwierdzić, że bardzo niekorzystnym efektem dynamicznym ruchu pociągów z dużymi prędkościami jest nadmierny przyrost wartości przyspieszeń toru. Efekt ten nie ujawnia się w drganiach dźwigara mostowego i może być znacznie zmniejszony poprzez wbudowanie w nawierzchnię kolejową dodatkowych elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów wibroizolacyjnych. Analiza skuteczności takiej wibroizolacji będzie przedmiotem dalszych badań autorów.

Literatura

- [1] Andersen L., Nielsen S.R.K.: Vibrations of a track caused by variation of the foundation stiffness, Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 18, 2003, pp. 171-184.
- [2] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K.: Impact study of cable-stayed railway bridge with random rail irregularities, Engineering Structures, vol. 24, no. 5, 2002, pp. 529-541.
- [3] Biondi B., Muscolino G., Sofi A.: A substructure approach for the dynamic analysis of train – track – bridge system, Computers and Structures, vol. 83, 2005, pp. 2271-2281.
- [4] Bryja D., Hołubowski R.: Modelowanie belkowych mostów kolejowych z zastosowaniem metody GFEM. Część I. Sformułowanie teoretyczne, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Budownictwo i Inżynieria Środowiska, nr 283, z. 59, 2012, s. 5-19.
- [5] Bryja D., Hołubowski R.: Losowe zmiany sztywności podsypki w analizie drgań zespolonego mostu kolejowego, Przegląd Komunikacyjny, nr 12, 2013, s. 30-35.
- [6] Bryja D., Hołubowski R.: GFEM modelling and Monte Carlo solutions for railway bridge with random track ballast, Proc. of the Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, 2013, doi:10.4203/ccp.102.21.
- [7] Bryja D., Hołubowski R., Gisterek I.: Railroad vehicle modelling in probabilistic vibration analysis of a railway bridge with randomly fluctuating track ballast stiff-

- ness, Proc. of the 9th European Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2014, Porto, Portugal, 30th June – 2nd July 2014 (in print).
- [8] Dahlberg T.: Railway track stiffness variations – consequences and countermeasures, International Journal of Civil Engineering, vol. 8, no. 1, 2010, pp. 1-12.
- [9] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybko-bieżnymi, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [10] Sobczyk K., Spencer B.F.: Stochastyczne modele zmęczenia materiałów, PWN, Warszawa 1996.
- [11] Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S.: Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways, World Scientific, Singapur 2004.
- [12] Yau J.D., Yang Y.B., Kuo S.R.: Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars, Engineering Structures, vol. 21, 1999, pp. 836-844.
- [13] PN-EN 1990:2004/A1:2008 – Podstawy projektowania konstrukcji – Załącznik A2.

HIGH SPEED EFFECTS IN STOCHASTIC VIBRATION ANALYSIS OF RAILWAY BRIDGE WITH RANDOMLY VARYING BALLAST STIFFNESS

Summary

The paper is devoted to vibration analysis of railway beam bridge with ballasted track under high-speed train passage. Along track random variations of the ballast stiffness are taken into account in the analysis. The dynamic model of the train, consisting of vehicles with 6 internal degrees of freedom each, is presented, and then, equations of motion of the bridge girder – ballasted track – train system are derived. Time histories of expected values and standard deviations are calculated with the use of Monte Carlo method, on the basis of numerical simulations performed for displacements and accelerations of bridge and track vibrations. Maximal values of these time-dependent probabilistic characteristics are shown on graphs in dependence on the train speed. Basing on an analysis of presented numerical results, the concluding remarks are formulated in order to estimate high speed effects on: a) expected values of bridge and track displacements and accelerations, b) standard deviations being a measure of vibration scattering due to random variations of the ballast stiffness.

Keywords: railway bridges, random vibrations, Monte Carlo simulations, probabilistic characteristics, displacement analysis, acceleration analysis

DOI:10.7862/rb.2014.26

Przesłano do redakcji: 16.05.2014 r.

Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.